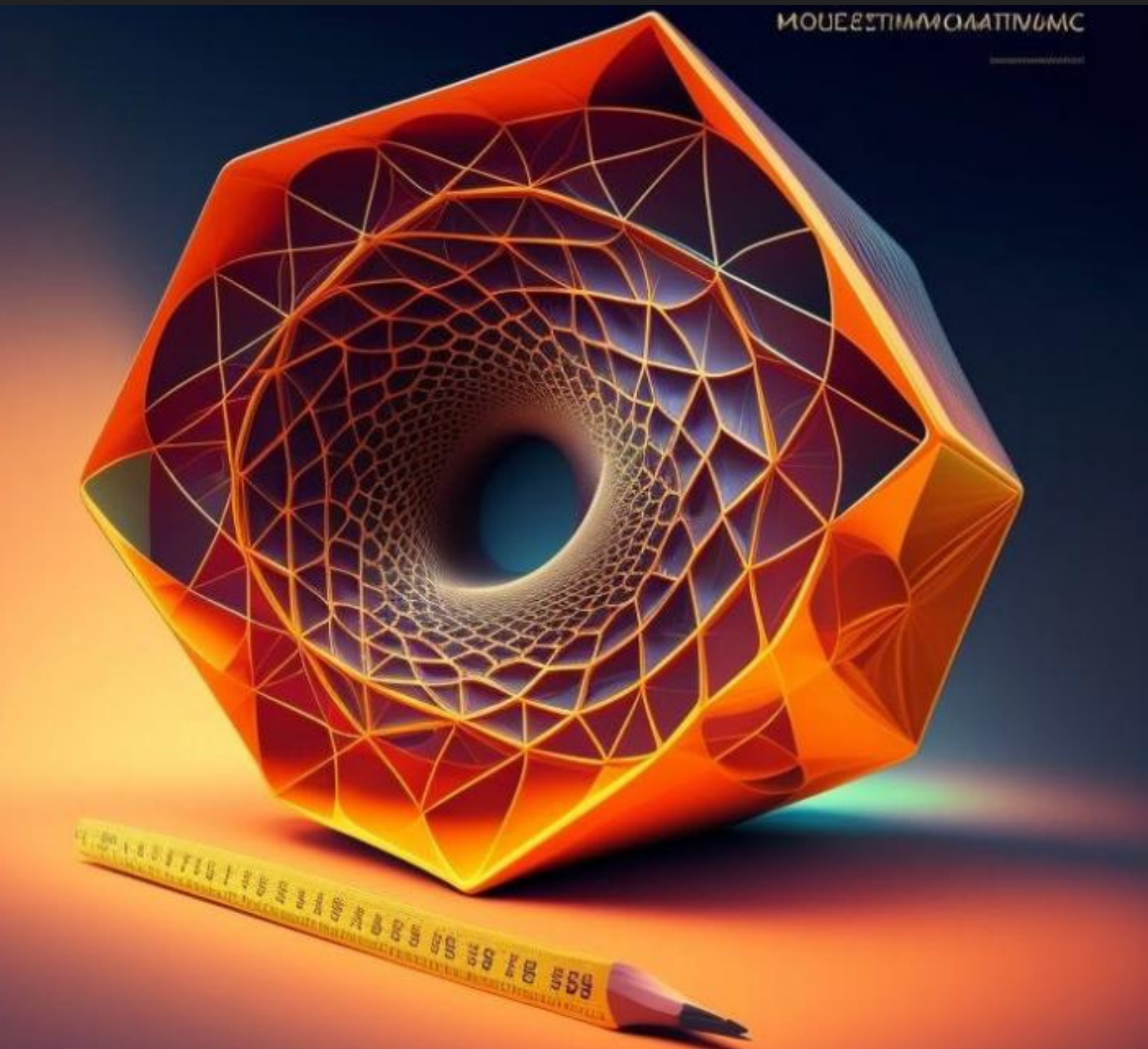
Um curso de Álgebra Linear

Leandro Nery Fernando Reis Maico Ribeiro



Copyright © 2023

PUBLICADO POR EDITORA DERIVE

BOOK-WEBSITE.COM

Primeira impressão, Março de 2023

Prefácio

Este livro foi escrito a partir de notas de aulas para uso simultâneo do professor e de seus alunos, em um curso introdutório de Álgebra Linear. As notas foram escritas de 2020 a 2022 e testadas na Universidade Federal de São Carlos e na Universidade Federal do Espírito Santo (Campus Goiabeiras e Campus São Mateus), tanto nos cursos de Matemática quanto nos cursos de Engenharias. Por isso, este livro foi pensado de modo que o professor possa explorá-lo por completo em sala de aula e também que os alunos possam usá-lo como texto de referência.

O livro é dividido em 13 capítulos. Como não é nossa intenção impor um ritmo de ensino aos professores, não dividimos os capítulos por aula e achamos melhor dividi-los por tema. Ao final de cada capítulo inserimos uma seção de exercícios que podem servir como lista de exercícios para os alunos. Os exercícios foram pensados com um nível crescente de dificuldade, sendo que alguns conceitos não abordados no texto podem estar definidos nos enunciados. Inserimos também alguns exercícios clássicos que aparecem em outros livros de Álgebra Linear.

O livro não pretende substituir a boa literatura do Álgebra Linear existente. De fato, ao visarmos um texto didático prático para o ensino de Álgebra Linear, apresentamos e provamos apenas os resultados mais relevantes para alcançarmos nosso objetivo. Por isso, este é um livro dedicado ao ensino de graduação, inclusive o bacharelado em Matemática.

Esperamos que os professores e alunos possam se beneficiar deste livro.

São Carlos - SP, São Mateus - ES, Vitória - ES, Março de 2023

Leandro Nery de Oliveira
Fernando Pereira Paulúcio Reis
Maico Felipe Ribeiro da Silva

Sumário

1 Espaços vetoriais 9

1.1 A definição de vetor 9

1.1.1 Segmentos equipolentes 10

1.1.2 A definição de vetor 11

1.2 Corpo 12

1.3 Espaços Vetoriais 13

1.3.1 Exemplos de Espaços Vetoriais 14

1.4 Exercícios 21

2 Subespaços vetoriais 25

2.1 Interseção e somas de subespaços 30

2.1.1 Soma direta 31

2.2 Exercícios 32

3 Combinação e dependência linear 35

3.1 Combinação linear 35

3.2 Dependência e independência linear 40

3.3 Exercícios 42

4 Base e dimensão de um espaço vetorial 45

4.1 Base de um espaço vetorial 45

4.2 Dimensão de um espaço vetorial 49

4.2.1 Dimensão da soma de subespaços vetoriais 52

4.3 Exercícios 53

5 Mudança de base ... 57
5.1 Coordenadas de um vetor ... 57
5.2 Matriz mudança de base ... 61
5.3 Exercícios ... 72

6 Transformações lineares ... 75
6.1 O espaço $\mathscr{L}(U,V)$ ... 81
6.1.1 O dual de um espaço vetorial ... 81
6.2 Núcleo e Imagem ... 83
6.3 Teorema do Núcleo e da Imagem ... 87
6.4 Isomorfismos ... 92
6.5 Exercícios ... 94

7 Matriz de uma transformação linear ... 97
7.1 Transformações lineares e matrizes ... 97
7.2 O isomorfismo entre $\mathscr{L}(U,V)$ e $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ ... 102
7.3 Transformações nilpotentes ... 106
7.4 Transformações idempotentes ... 106
7.5 Transformações involutivas ... 107
7.6 Posto e nulidade de uma transformação linear ... 107
7.7 Exercícios ... 109

8 Autovalores e Autovetores ... 113
8.1 Polinômio característico ... 115
8.1.1 O Teorema de Cayley-Hamilton ... 118
8.2 Multiplicidades algébrica e geométrica ... 121
8.3 Subespaços invariantes ... 127
8.4 Exercícios ... 130

9 Diagonalização de operadores ... 133
9.1 Operadores diagonalizáveis ... 133
9.2 Polinômio minimal ... 143
9.3 Forma canônica de Jordan ... 144
9.3.1 Relação entre multiplicidade dos autovalores e os blocos de Jordan ... 145
9.3.2 Autoespaços generalizados ... 151
9.4 Exercícios ... 156

10 Espaços com produto interno ... 159
10.1 Espaços euclidianos ... 159
10.1.1 Espaços hermitianos ... 162
10.2 Norma ... 163
10.3 Distância entre dois vetores ... 165
10.4 Ângulo entre dois vetores ... 165
10.5 Conjuntos ortogonais e ortonormais ... 167
10.6 Complemento ortogonal ... 168
10.7 Processo de ortonornalização de Gram-Schmidt ... 170
10.7.1 Processo de Gram-Schmidt ... 171
10.8 Exercícios ... 172

11 Operadores autoadjuntos e ortogonais ... 177
11.1 Isometria ... 177
11.2 Operadores autoadjuntos e ortogonais ... 182
11.3 Exercícios ... 186

12 Os Teoremas Espectrais ... 189
12.1 Operador adjunto ... 189
12.2 Teorema espectral para operadores autoadjuntos ... 191
12.3 Operadores normais ... 192
12.4 Teorema espectral para operadores normais ... 193
12.5 Exercícios ... 196

13 Formas lineares, bilineares e quadráticas ... 197
13.1 Formas lineares e bilineares ... 197
13.1.1 Matriz da forma bilinear ... 200
13.2 Formas quadráticas ... 201
13.2.1 Diagonalização da forma quadrática ... 202
13.3 Exercícios ... 203

Bibliography ... 205

Index ... 207

1. Espaços vetoriais

1.1 A definição de vetor

Considere o plano $\mathbb{R}^2$ e dois pontos distintos A e B.

O segmento de reta é dito *orientado* se para um par de pontos distintos, um é chamado de *origem* e o outro é chamado de *extremidade*. Pode-se indicar a origem como um ponto e a extremidade como uma seta.

Segmento orientado:

- O segmento orientado de origem A e extremidade B é representado por AB.
- O segmento orientado BA é o *oposto* do segmento AB.
- O comprimento (ou módulo) de um segmento orientado AB é a medida do segmento em relação a uma unidade de medida. É indicado por $\overline{AB}$.

▪ **Exemplo 1.1** Defina o produto interno como $\langle (x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle_1 = 4x_1x_2 + y_1y_2$ em $\mathbb{R}^2$. Calcule o produto interno entre os vetores $u = (1,1)$ e $v = (2,1)$.

$$\langle (1,1),(2,1)\rangle_1 = 4\cdot 1\cdot 2 + 1 = 9.$$

Se definimos a norma como $||v||_1 = \sqrt{\langle v,v\rangle_1}$ então

$$||(1,1)||_1 = \sqrt{\langle (1,1),(1,1)\rangle_1} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}.$$

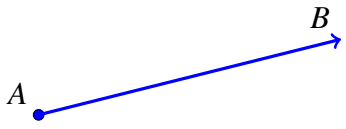
Por outro lado, pelo produto interno canônico, temos

$$\langle (1,1),(2,1)\rangle = 1\cdot 2 + 1 = 3.$$

Pela norma canônica,

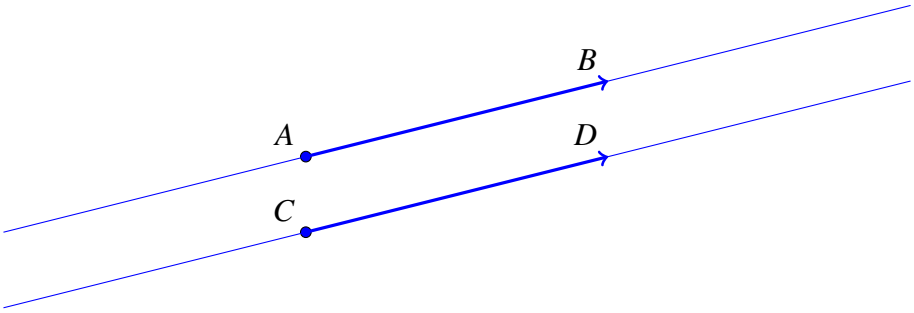
$$||(1,1)|| = \sqrt{\langle (1,1),(1,1)\rangle} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}.$$

▪

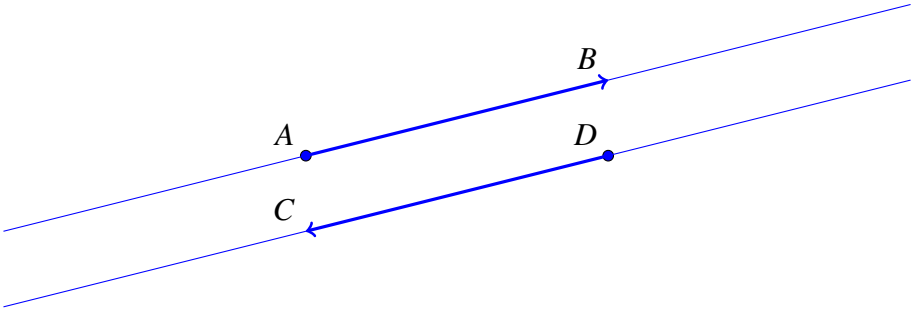


Direção e sentido

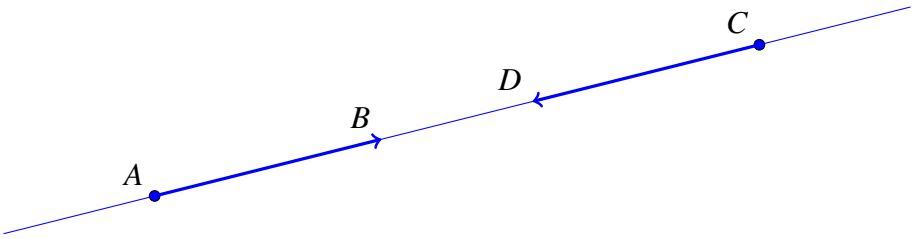
- Dois segmentos orientados AB e CD têm mesma *direção* se as retas que os contêm são paralelas



ou



ou coincidentes



- Dois segmentos orientados têm o mesmo *sentido* se têm a mesma direção e não são opostos.
  Observe que os sentidos de dois segmentos não está definido se os segmentos não têm a mesma direção.

1.1.1 Segmentos equipolentes

Definição 1.1 Dois segmentos são *equipolentes* se têm a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento.

A equipolência de dois segmentos AB e CD é representado por $AB \sim CD$ (lê-se: "AB é equipolente a CD").

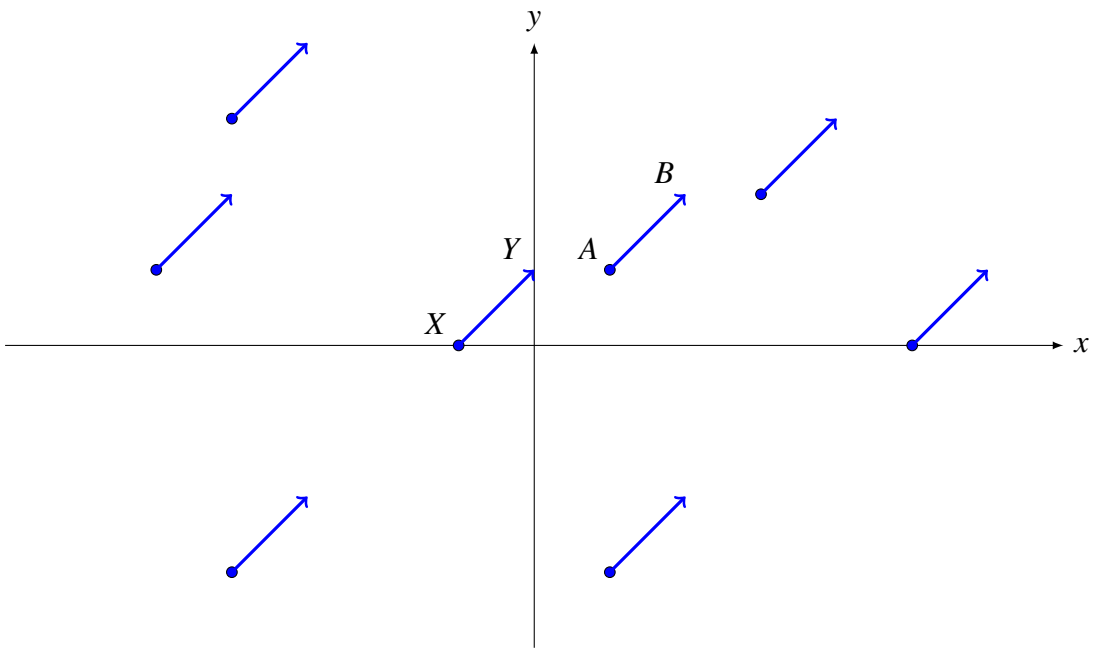
Propriedades da equipolência: Considere três segmentos orientados AB, CD e EF, então valem as seguintes propriedades:

1. **Reflexiva:** $AB \sim AB$;
2. **Simétrica:** Se $AB \sim CD$ então $CD \sim AB$;
3. **Transitiva:** Se $AB \sim CD$ e $CD \sim EF$ então $AB \sim EF$;
4. Dado um segmento orientado AB e um ponto C existe um único ponto D tal que $AB \sim CD$.

Com estas propriedades, a equipolência é uma relação de equivalência.

1.1.2 A definição de vetor

Considere o segmento orientado AB. No plano $\mathbb{R}^2$ existe uma infinidade de vetores que são equipolentes a AB.



Definição 1.2 Com essa construção que fizemos, definimos **vetor** como a classe de equivalência de algum segmento AB:

$$\vec{v} = \{XY : XY \sim AB\},$$

onde XY é um segmento qualquer.

Como $\vec{v}$ é uma classe de equivalência, escolhemos o "melhor" representante desta classe. Faz sentido, portanto, que o ponto origem do segmento representante esteja posicionado na

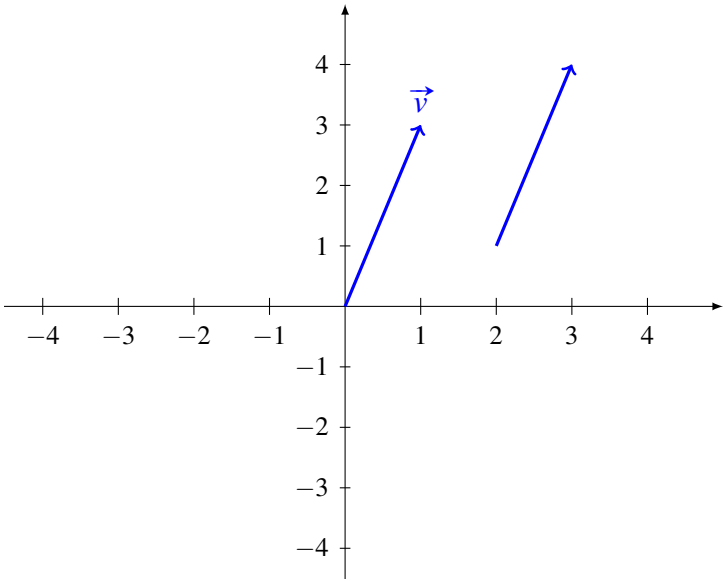
origem do sistema, o ponto $(0,0)$. Desta forma, basta saber qual é a extremidade. Para isso, fazemos

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A.$$

■ **Exemplo 1.2** Sejam os pontos $A(2,1)$ e $B(3,4)$. Calcular o vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$. Temos

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (3,4) - (2,1) = (3-2, 4-1) = (1,3).$$

O vetor $\vec{v} = (1,3)$ é representado como



■

1.2 Corpo

Antes de definirmos um espaço vetorial, precisamos entender o que é um corpo.

Definição 1.3 Um conjunto $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ (essa notação significa que o conjunto é dotado de uma soma e um produto) é um corpo se, para cada $x, y, z \in \mathbb{K}$, valem as seguintes propriedades:

1. Comutativa da soma:
$$x + y = y + x.$$
2. Associativa da soma:
$$(x + y) + z = x + (y + z).$$
3. Existência do elemento neutro da soma:
$$0 + x = x.$$
4. Existencia do inverso aditivo:
$$x + (-x) = -x + x = 0,$$

para todo $x \in \mathbb{K}$.

5. Distributiva do produto em relação à soma:

$$x(y+z) = xy+xz; (x+y)z = xz+yz.$$

6. Associativa do produto:

$$x(yz) = (xy)z.$$

7. Existência do elemento neutro do produto:

$$1 \cdot x = x.$$

8. Comutativa do produto:

$$xy = yx.$$

9. Domínio: Se $xy = 0$ então $x = 0$ ou $y = 0$.
10. Existência do elemento inverso multiplicativo:

$$x^{-1}x = 1,$$

para cada $x \in \mathbb{K}$.

Os exemplos mais conhecidos de corpos são os conjuntos dos números racionais $\mathbb{Q}$ e reais $\mathbb{R}$. Existem também uma infinidade de corpos contidos em $\mathbb{R}$ e que contém $\mathbb{Q}$, por exemplo,

$$\mathbb{Q}[\sqrt{p}] = \{a+b\sqrt{p}; a,b \in \mathbb{Q} \text{ e } p \text{ é primo}\}$$

ou

$$\mathbb{Q}[\pi] = \{a+b\pi; a,b \in \mathbb{Q}\}.$$

1.3 Espaços Vetoriais

Considere um conjunto V, onde um corpo $\mathbb{K}$ atua em V. Suponha que em V estão bem-definidas duas operações:

$$\begin{aligned} \textbf{adição} &: (u,v) \in V \times V \to u+v \in V; \\ \textbf{multiplicação} &: (\lambda, v) \in \mathbb{K} \times V \to \lambda \cdot v \in V. \end{aligned}$$

Definição 1.4 O conjunto V é chamado de *espaço vetorial*, e denotado por $V(\mathbb{K})$ (lê-se: V é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$), e seus elementos são chamados de vetores se, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ (chamado de escalares) e $u,v,w \in V$, as condições abaixo são satisfeitas:

1. **Comutatividade da soma:**

$$u+v = v+u.$$

2. **Associatividade da soma:**

$$u+(v+w) = (u+v)+w.$$

3. **Existência do elemento neutro:** existe um vetor nulo $0 \in V$ tal que

$$u + 0 = 0 + u = u,$$

para todo $u \in V$.

4. **Existência do inverso aditivo:** para cada vetor $u \in V$ existe um vetor $-u \in V$, chamado de inverso aditivo tal que

$$u + (-u) = -u + u = 0.$$

5. **Associatividade do produto por escalar:**

$$\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u.$$

6. **Distributiva do produto de um vetor em relação à soma de dois escalares:**

$$(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u.$$

7. **Distributiva do produto de um escalar em relação à soma de dois vetores:**

$$\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v.$$

8. **Produto do elemento neutro do corpo $\mathbb{K}$ em relação a um vetor:**

$$1 \cdot u = u.$$

Se V for um espaço vetorial real ($V(\mathbb{R})$), então diremos simplesmente que V é um espaço vetorial.

Seja $V = \mathbb{Q}$ então:

1. Se $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ então V é um espaço vetorial racional. De fato, todo corpo é um espaço vetorial sobre si mesmo. (Confiram!)
2. Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ então V não é um espaço vetorial real. Pois sendo $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ mas $\sqrt{2}v \notin \mathbb{Q}$, $\forall v \in \mathbb{Q}$.

1.3.1 Exemplos de Espaços Vetoriais

O conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ é um espaço vetorial real? Note que o conjunto $\mathbb{C}$ é fechado para o produto, uma vez que se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $z = a + bi \in \mathbb{C}$ então

$$\alpha \cdot z = \alpha(a + bi) = \alpha \cdot a + \alpha \cdot bi \in \mathbb{C}.$$

Sabemos que $\mathbb{C}$ é um corpo. Então valem todas as propriedades de espaço vetorial, onde os escalares são reais.

Veja que sempre indicamos qual é o corpo que está agindo sobre um espaço vetorial V. Quando nada é dito sobre o corpo, assumimos que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

▪ **Exemplo 1.3** O conjunto $\mathbb{R}^3$.

Vamos mostrar que $\mathbb{R}^3$ é um espaço vetorial real, considerando as operações de adição e multiplicação por escalar usuais. Sabemos que qualquer elemento de $\mathbb{R}^3$ é escrito como uma

terna (x,y,z). Sejam $u=(x_1,y_1,z_1)$, $v=(x_2,y_2,z_2)$ e $w=(x_3,y_3,z_3)$ ternas em $\mathbb{R}^3$ e também α, $\beta \in \mathbb{R}$. Temos:

1. Comutativa da soma:

$$\begin{aligned} u+v &= (x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2) \\ &= (x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2) \\ &= (x_2+x_1,y_2+y_1,z_2+z_1) \\ &= (x_2,y_2,z_2)+(x_1,y_1,z_1) \\ &= v+u. \end{aligned}$$

2. Associativa da soma:

$$\begin{aligned} (u+v)+w &= [(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)]+(x_3,y_3,z_3) \\ &= (x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)+(x_3,y_3,z_3) \\ &= ((x_1+x_2)+x_3,(y_1+y_2)+y_3,(z_1+z_2)+z_3) \\ &= (x_1+(x_2+x_3),y_1+(y_2+y_3),z_1+(z_2+z_3)) \\ &= (x_1,y_1,z_1)+(x_2+x_3,y_2+y_3,z_2+z_3) \\ &= (x_1,y_1,z_1)+[(x_2,y_2,z_2)+(x_3,y_3,z_3)] \\ &= u+(v+w). \end{aligned}$$

3. Existência do elemento neutro da soma: Considere a origem de $\mathbb{R}^3$, $O=(0,0,0)$. Temos que

$$O+u=(0,0,0)+(x_1,y_1,z_1)=(0+x_1,0+y_1,0+z_1)=(x_1,y_1,z_1)=u.$$

4. Existência do inverso aditivo (simétrico): Para cada $u=(x_1,y_1,z_1)\in\mathbb{R}^3$, temos que $-u=(-x_1,-y_1,-z_1)$ é o inverso aditivo de u:

$$u+(-u)=(x_1,y_1,z_1)+(-x_1,-y_1,-z_1)=(x_1+(-x_1),y_1+(-y_1),z_1+(-z_1))=(0,0,0)=O.$$

5. Associativa em relação ao produto de dois escalares:

$$\begin{aligned} \alpha(\beta u) &= \alpha[\beta(x,y,z)]=\alpha(\beta x,\beta y,\beta z)=(\alpha(\beta x),\alpha(\beta y),\alpha(\beta z))=((\alpha\beta)x,(\alpha\beta)y,(\alpha\beta)z) \\ &= (\alpha\beta)(x,y,z)=(\alpha\beta)u. \end{aligned}$$

6. Distributiva do produto em relação à soma de dois escalares:

$$\begin{aligned} (\alpha+\beta)u &= (\alpha+\beta)(x,y,z)=((\alpha+\beta)x,(\alpha+\beta)y,(\alpha+\beta)z) \\ &= (\alpha x+\beta x,\alpha y+\beta y,\alpha z+\beta z) \\ &= (\alpha x,\alpha y,\alpha z)+(\beta x,\beta y,\beta z) \\ &= \alpha(x,y,z)+\beta(x,y,z) \\ &= \alpha u+\beta u. \end{aligned}$$

7. Distributiva do produto de um escalar em relação à soma de dois vetores:

$$\begin{aligned}
\alpha(u+v) &= \alpha[(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)] \\
&= \alpha(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2) \\
&= (\alpha(x_1+x_2),\alpha(y_1+y_2),\alpha(z_1+z_2)) \\
&= (\alpha x_1+\alpha x_2,\alpha y_1+\alpha y_2,\alpha z_1+\alpha z_2) \\
&= (\alpha x_1,\alpha y_1,\alpha z_1)+(\alpha x_2,\alpha y_2,\alpha z_2) \\
&= \alpha(x_1,y_1,z_1)+\alpha(x_2,y_2,z_2) \\
&= \alpha u+\alpha v.
\end{aligned}$$

8. Produto do elemento neutro do corpo dos reais em relação a um vetor:

$$1\cdot u = 1\cdot(x,y,z) = (1\cdot x, 1\cdot y, 1\cdot z) = (x,y,z) = u.$$

Isso tudo mostra que o conjunto das ternas ordenadas $\mathbb{R}^3$ é um espaço vetorial real. ∎

∎ **Exemplo 1.4** O conjunto $\mathbb{R}^n$, para todo $n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,\cdots\}$.

Basta tomar $u = (x_1,x_2,\cdots,x_n), v = (y_1,y_2,\cdots,y_n)$ e $w = (z_1,z_2,\cdots,z_n)$ e seguir uma demonstração análoga ao Exemplo 1.3. ∎

∎ **Exemplo 1.5** O conjunto $\mathbb{R}^\infty = \{(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots); x_i \in \mathbb{R}, i \in \mathbb{N}\}$. ∎

Demonstração análoga ao Exemplo 1.3, tomando $u = (x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)$, $v = (y_1,y_2,\cdots,y_n,\cdots)$ e $w = (z_1,z_2,\cdots,z_n,\cdots)$. O elemento nulo de $\mathbb{R}^\infty$ é a sequência $0 = (0,\cdots,0,\cdots)$ formada por infinitos zeros. As operações de adição e multiplicação por escalar podem ser as usuais.

∎ **Exemplo 1.6** Tome $\mathbb{M}^n(\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes quadradas de ordem n, para todo $n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,\cdots\}$. ∎

Sejam $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = (a_{ij})_{n\times n}$, $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} = (b_{ij})_{n\times n}$

e $C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} = (c_{ij})_{n\times n}$. Note que

$$A+B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{nn}+b_{nn} \end{bmatrix} = (a_{ij}+b_{ij})_{n\times n}, \text{ onde } a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Usando a notação para matrizes, dada acima, temos que valem as seguintes propriedades:

1. Comutativa da soma:

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{n\times n}=(b_{ij}+a_{ij})_{n\times n}=B+A.$$

2. Associativa da soma:

$$(A+B)+C=((a_{ij}+b_{ij})+c_{ij})_{n\times n}=(a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij}))_{n\times n}=A+(B+C).$$

3. Existência do elemento neutro da soma: Considere a matriz nula de $\mathbb{M}^n(\mathbb{R})$, $O=(o_{ij})_{n\times n}$, onde $o_{ij}=0$, para todo $i,j=1,\cdots,n$. Temos que

$$O+A=(o_{ij}+a_{ij})_{n\times n}=(0+a_{ij})_{n\times n}=(a_{ij})_{n\times n}=A.$$

4. Existência do inverso aditivo (simétrico): Para cada $A\in\mathbb{M}^n(\mathbb{R})$, temos que $-A=(-a_{ij})_{n\times n}$ é o inverso aditivo de A:

$$A+(-A)=(a_{ij}+(-a_{ij}))_{n\times n}=(o_{ij})_{n\times n}=O.$$

5. Associativa em relação ao produto de dois escalares:

$$\alpha(\beta A)=\alpha(\beta(a_{ij})_{n\times n})=\alpha(\beta a_{ij})_{n\times n}=(\alpha(\beta a_{ij}))_{n\times n}=(\alpha\beta)(a_{ij})_{n\times n}=(\alpha\beta)A.$$

Como exercício, complete a demonstração.

▪ **Exemplo 1.7** O conjunto $V=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; y=x+1\}$ não é espaço vetorial. ▪

De fato, note que se $x=0$ então $y=1$. Portanto, $(0,0)\notin V$.

Vejamos, só por curiosidade, se existe o inverso aditivo de cada elemento de V. Se $(x,y)\in V$ então todos os vetores de V são da forma $(x,x+1)$. O elemento $(-x,-x-1)\in V$? Sim, pois como $y=x+1$ então $-y=-x-1$. Logo, $(-x,-y)\in V$.

O conjunto V é chamado de *espaço afim*.

▪ **Exemplo 1.8** O conjunto $V=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; y=x^2\}$ não é espaço vetorial. ▪

De fato, $(x,y)\in V$ não possui inverso aditivo, pois $y\geq 0$.

O conjunto V não é fechado com relação ao produto por escalar. Note que se $(x,y)\in V$ e $\lambda\in\mathbb{R}$ temos que $\lambda(x,y)=(\lambda x,\lambda y)=(\lambda x,\lambda x^2)\notin V$, pois $\lambda x^2\neq\lambda^2x^2$.

▪ **Exemplo 1.9** O conjunto de todas as matrizes de ordem $m\times n$, $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Sejam $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{m\times n}$ e $C=(c_{ij})_{m\times n}$ matrizes de $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Então:

1. Comutativa da soma:

$$A+B=(a_{ij})_{m\times n}+(b_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}=(b_{ij}+a_{ij})_{m\times n}=(b_{ij})_{m\times n}+(a_{ij})_{m\times n}=B+A.$$

2. Distributiva de um escalar em relação à soma de dois vetores:

$$\begin{aligned}\alpha(A+B) &= \alpha(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}=(\alpha(a_{ij}+b_{ij}))_{m\times n}=(\alpha a_{ij}+\alpha b_{ij})_{m\times n}\\ &= (\alpha a_{ij})_{m\times n}+(\alpha b_{ij})_{m\times n}=\alpha(a_{ij})_{m\times n}+\alpha(b_{ij})_{m\times n}\\ &= \alpha A+\alpha B.\end{aligned}$$

O restante da demonstração segue de forma análoga ao exemplo feito na Aula 2. ∎

∎ **Exemplo 1.10** O conjunto dos polinômios $\mathscr{P}_n(\mathbb{R})$ com coeficientes reais de grau menor ou igual a n.

Podemos escrever $\mathscr{P}_n(\mathbb{R}) = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n : a_i \in \mathbb{R}\}$.

Sejam $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n$ e $r(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n$ polinômios e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1. Comutativa da soma:

$$\begin{aligned} p(x)+q(x) &= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n) + (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n) \\ &= (a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + \cdots + (a_n+b_n)x^n \\ &= (b_0+a_0) + (b_1+a_1)x + \cdots + (b_n+a_n)x^n \\ &= (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n) + (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n) \\ &= q(x)+p(x). \end{aligned}$$

2. Associativa da soma:

$$\begin{aligned} [p(x)+q(x)]+r(x) &= [(a_0+b_0)+c_0] + [(a_1+b_1)+c_1]x + \cdots + [(a_n+b_n)+c_n]x^n \\ &= [a_0+(b_0+c_0)] + [a_1+(b_1+c_1)]x + \cdots + [a_n+(b_n+c_n)]x^n \\ &= p(x)+[q(x)+r(x)]. \end{aligned}$$

3. Existência do elemento neutro da soma: definimos o polinômio nulo como sendo

$$o(x) = 0 = 0 + 0x + 0x^2 + \cdots + 0x^n.$$

Temos que o polinômio nulo é o elemento neutro da adição. De fato,

$$\begin{aligned} p(x)+o(x) &= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n) + (0 + 0x + 0x^2 + \cdots + 0x^n) \\ &= (a_0+0) + (a_1+0)x + (a_2+0)x^2 + \cdots + (a_n+0)x^n \\ &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \\ &= p(x). \end{aligned}$$

4. Existência do inverso aditivo (simétrico): definimos o polinômio

$$-p(x) = -a_0 - a_1x - a_2x^2 - \cdots - a_nx^n.$$

Temos que $-p(x)$ é o inverso aditivo de $p(x)$:

$$\begin{aligned} p(x)+(-p(x)) &= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n) + (-a_0 - a_1x - a_2x^2 - \cdots - a_nx^n) \\ &= (a_0-a_0) + (a_1-a_1)x + (a_2-a_2)x^2 + \cdots + (a_n-a_n)x^n \\ &= 0 + 0x + 0x^2 + \cdots + 0x^n \\ &= o(x). \end{aligned}$$

5. Associativa em relação ao produto de dois escalares:

$$\begin{aligned}\alpha(\beta p(x)) &= \alpha[\beta(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n)]\\ &= \alpha(\beta a_0+\beta a_1x+\cdots+\beta a_nx^n)\\ &= \alpha(\beta a_0)+\alpha(\beta a_1)x+\cdots+\alpha(\beta a_n)x^n\\ &= (\alpha\beta)a_0+(\alpha\beta)a_1x+\cdots+(\alpha\beta)a_nx^n\\ &= (\alpha\beta)(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n)\\ &= (\alpha\beta)p(x).\end{aligned}$$

6. Distributiva do produto de um vetor em relação à soma de dois escalares:

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)p(x) &= (\alpha+\beta)(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n)\\ &= (\alpha+\beta)a_0+(\alpha+\beta)a_1x+\cdots+(\alpha+\beta)a_nx^n\\ &= (\alpha a_0+\beta a_0)+(\alpha a_1+\beta a_1)x+\cdots+(\alpha a_n+\beta a_n)x^n\\ &= (\alpha a_0+\alpha a_1x+\cdots+\alpha a_nx^n)+(\beta a_0+\beta a_1x+\cdots+\beta a_nx^n)\\ &= \alpha(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n)+\beta(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n)\\ &= \alpha p(x)+\beta p(x).\end{aligned}$$

7. Distributiva do produto de um escalar em relação à soma de dois vetores:

$$\begin{aligned}\alpha(p(x)+q(x)) &= \alpha[(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n)+(b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n)]\\ &= \alpha[(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+\cdots+(a_n+b_n)x^n]\\ &= \alpha(a_0+b_0)+\alpha(a_1+b_1)x+\cdots+\alpha(a_n+b_n)x^n\\ &= (\alpha a_0+\alpha b_0)+(\alpha a_1+\alpha b_1)x+\cdots+(\alpha a_n+\alpha b_n)x^n\\ &= (\alpha a_0+\alpha a_1x+\cdots+\alpha a_nx^n)+(\alpha b_0+\alpha b_1x+\cdots+(\alpha b_nx^n)\\ &= \alpha p(x)+\alpha q(x).\end{aligned}$$

8. Produto do elemento neutro do corpo dos reais em relação a um vetor:

$$\begin{aligned}1\cdot p(x) &= 1\cdot(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n)\\ &= 1\cdot a_0+1\cdot a_1x+\cdots+1\cdot a_nx^n\\ &= a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=p(x).\end{aligned}$$

Logo, $\mathscr{P}_n(\mathbb{R})$ é um espaço vetorial. ∎

Podemos definir uma função que associa cada polinômio de grau menor ou igual a n com uma $(n+1)$-upla (é um vetor com $n+1$ coordenadas: $(y_0,y_1,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$) da seguinte forma:

$$\phi:\mathscr{P}_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R}^{n+1},$$

definida como $\phi(p(x))=(a_0,a_1,\cdots,a_n)$. Note que a função ϕ é bijetiva.

▪ **Exemplo 1.11** O conjunto $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ de todos os polinômios com coeficientes reais é um espaço vetorial real.

É imediato que $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ é um espaço vetorial e a demonstração disso é análoga à demonstração de $\mathscr{P}_n(\mathbb{R})$.

Pode-se escrever os vetores de $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ da forma

$$p(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i.$$

▪

▪ **Exemplo 1.12** O conjunto de todas as funções reais $\mathscr{F}(X;\mathbb{R})$, onde $X \neq \emptyset$ é um conjunto qualquer.

Se definirmos a soma $f+g$ e o produto por escalar $\alpha \cdot f$ como

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x); \quad (\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x),$$

não é difícil mostrar que $\mathscr{F}(X;\mathbb{R})$ é um espaço vetorial real.

Da mesma forma, podemos definir $\mathscr{F}(X;\mathbb{C})$ como um exemplo de um espaco vetorial complexo.

Se $X = \{1\}$ então $f_x(1) = x \in \mathbb{R}$ é uma forma geral de qualquer função real em $\mathscr{F}(\{1\};\mathbb{R})$, isto é

$$f_1(1) = 1, f_2(1) = 2, f_\pi(1) = \pi, f_e(1) = e$$

Portanto, podemos identifcar todos os elementos de $\mathscr{F}(\{1\};\mathbb{R})$ com o conjuto dos números reais $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathscr{F}(\{1\};\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ f_x : \{1\} \to \mathbb{R} & \mapsto & f_x(1). \end{array}$$

A aplicação φ é bijetiva. Logo, $\mathscr{F}(\{1\};\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Logo, $\mathscr{F}(\{1\};\mathbb{R})$ é um espaço vetorial.

Se $X = \{1,2\}$ então $\mathscr{F}(\{1,2\};\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2$. Observe que, cada função $f \in \mathscr{F}(\{1,2\};\mathbb{R})$, pode ser escrita como um par ordenado $(f(1), f(2))$. Para isto, escrevemos a aplicação

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathscr{F}(\{1,2\};\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}^2 \\ f : \{1,2\} \to \mathbb{R} & \mapsto & (f(1), f(2)). \end{array}$$

Não é difícil mostrar que φ é uma sobrejeção, pois para qualquer $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, temos que existe alguma função $f \in \mathscr{F}(\{1,2\};\mathbb{R})$ tal que $f(1) = x$ e $f(2) = y$. Logo, φ é sobrejetiva. À medida que variamos a função f, cobrimos todo o plano $\mathbb{R}^2$.

De maneira geral, se $X = \{1,2,\cdots,n\}$ então $\mathscr{F}(\{1,2,\cdots,n\};\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n$. Se $X = \mathbb{N}$ então $\mathscr{F}(\mathbb{N};\mathbb{R}) = \mathbb{R}^\infty$. Se $X = \{1,\cdots,m\} \times \{1,\cdots,n\}$ então $\mathscr{F}(X;\mathbb{R}) = \mathbb{M}_{m\times n}$. ▪

▪ **Exemplo 1.13** Verificar se $W = \{(x,x,z); x,z \in \mathbb{R}\}$ é um espaço vetorial.

Sejam $u = (x_1,x_1,z_1), v = (x_2,x_2,z_2)$ e $w = (x_3,x_3,z_3)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1. Comutativa da soma:

$$\begin{aligned} u+v &= (x_1,x_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2) \\ &= (x_1+x_2,x_1+x_2,z_1+z_2) \\ &= (x_2+x_1,x_2+x_1,z_2+z_1) \\ &= (x_2,x_2,z_2)+(x_1,y_1,z_1) \\ &= v+u. \end{aligned}$$

Façam o restante. ∎

∎ **Exemplo 1.14** Verificar se $W=\{f\in\nabla^0(\mathbb{R}); f(-x)=f(x),\forall x\in\mathbb{R}\}$, onde $\nabla^0(\mathbb{R})$ é conjunto de todas as funções reais contínuas, é um espaço vetorial.

Sejam $f,g,h\in W$ e $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Note que W é fechado para a soma e multiplicação por escalar, pois

$$(f+g)(-x)=f(-x)+g(-x)=f(x)+g(x)=(f+g)(x).$$

Logo, $f+g\in W$. Da mesma forma,

$$(\alpha\cdot f)(-x)=\alpha\cdot f(-x)=\alpha\cdot f(x)=(\alpha\cdot f)(x).$$

Logo, $\alpha\cdot f\in W$.

1. Comutativa da soma:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=g(x)+f(x)=(g+f)(x),$$

pois $f(x),g(x)\in\mathbb{R}$ pela própria definição das funções f e g. No reais vale a propriedade comutativa, logo segue o resultado.

2. Associatividade da soma:

$$\begin{aligned} [(f+g)+h](x) &= (f+g)(x)+h(x) \\ &= [f(x)+g(x)]+h(x) \\ &= f(x)+[g(x)+h(x)] \\ &= f(x)+(g+h)(x) \\ &= [f+(g+h)](x). \end{aligned}$$

A justificativa é a mesma para o caso da propriedade anterior.

As outras propriedades seguem a mesma ideia. ∎

1.4 Exercícios

Lembre que só faz sentido falar de um espaço vetorial V se você definir um corpo que age em V. As propriedades do produto por escalar de um espaço vetorial justificam isso. Dizer que um espaço vetorial é real significa que os escalares são números reais. Se um espaço vetorial é complexo, então os escalares são números complexos. Se um espaço vetorial é racional, então os escalares são números racionais. Assim, um conjunto pode ser um espaço vetorial sobre um corpo, mas não ser espaço vetorial sobre outro corpo. Se nada for dito sobre o corpo, assumimos que o espaço vetorial é real. Os exercícios a seguir mostram isso.

1. O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é um espaço vetorial real? O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é um espaço vetorial complexo? Justifique.

2. O conjunto dos números racionais

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

é um espaço vetorial real? Será que o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ é um espaço vetorial racional? Justifique.

3. Seja V o espaço vetorial $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \cdots, n\}$. Qual é o vetor nulo de V e o que é $-(x_1, x_2, \cdots, x_n)$?

4. Seja $W = M(2,2)$, isto é, W é o conjunto de todas as matrizes quadradas de ordem 2. Descreva o vetor nulo e o vetor oposto de W.

5. Verifique se o conjunto solução do sistema a seguir é um espaço vetorial:

$$\begin{cases} x+y \quad\quad -w=0 \\ x \quad\quad -z+w=2 \\ \quad\quad y+z-w=-3 \\ x+y \quad\quad -2w=1 \end{cases}.$$

6. Seja S o espaço solução do sistema

$$\begin{cases} x+y+az=0 \\ x+ay+z=0 \\ ax+y+z=0 \end{cases}.$$

Determine os valores de a para os quais S seja: a própria origem; uma reta que passa pela origem; e, um plano que passa pela origem.
(*Sugestão: a matriz dos coeficientes deve ser escalonada. Lembre que, neste caso, para que o sistema possua uma única solução (a origem, no caso) a matriz escalonada não terá linhas nulas. Para que a solução do sistema seja uma reta, a matriz escalonada deve ter uma linha nula. E, por fim, para que a solução do sistema seja um plano, a matriz escalonada deve ter duas linhas nulas. Determine o valor de a para cada um destes casos.*)

7. Verifique se em cada um dos itens abaixo o subconjunto W é um espaço vetorial:
   (a) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x+3y-z=0\}$;
   (b) $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) : b = a \text{ e } d = -a \right\}$;
   (c) $W = \{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) : A^t = -A\}$;
   (d) $W = \{(x,x,z) : x,z \in \mathbb{R}\}$;
   (e) $W = \{f \in \nabla^0(\mathbb{R}) : f(-x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$;

(f) $W = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \det \begin{bmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 0 \right\}$;

(g) $W = \{A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) : tr(A) = 0\}$ (lembre que $tr(A)$ é a soma dos elementos da diagonal principal a matriz).

Algumas vezes, um conjunto é munido com operações de adição e multiplicação por escalar que são diferentes do padrão (ou usual). Essa quebra da forma usual de somar ou multiplicar por escalar pode mudar a forma do conjunto, fazendo com que se quebre algumas propriedades de espaço vetorial. Assim, um conjunto que é um espaço vetorial (real ou complexo), sob a soma e multiplicação usuais, pode não continuar sendo um espaço vetorial se mudamos as operações.

8. Seja V o conjunto de todos os pares ordenados de números reais ($V = \mathbb{R}^2$) e considere as operações de adição e multiplicação por escalar definidas por:

$$\begin{aligned} u \oplus v &= (x,y) \oplus (s,t) = (x+s+1, y+t-2), \\ \alpha \odot u &= (\alpha x + \alpha - 1, \alpha y - 2\alpha + 2) \end{aligned}$$

onde $+$ representa a soma usual.

(a) Calcule $u \oplus v$ e $\alpha \odot u$ para $u = (-2,3)$, $v = (1,-2)$ e $\alpha = 2$.

(b) Verifique que $\mathbf{0} \neq (0,0)$. Isto é, verifique que o vetor nulo de V, com as operações definidas, não é a origem.
Isso mostra que, dependendo das operações definidas, nem sempre o zero é o elemento neutro. Sugestão: Encontre um vetor $\mathbf{0}$ *tal que* $u \oplus \mathbf{0} = u$ (**0** *representa o "vetor nulo"de V com as operações definidas).*

(c) Quem é $-u$?

(d) Mostre que $-u \oplus u = 0$.

(e) Verifique se V é um espaço vetorial real.

9. Seja V o conjunto de todos os pares ordenados de números reais e considere as operações de adição e multiplicação por escalar definidas por:

$$\begin{aligned} u \oplus v &= (x,y) \oplus (s,t) = (x+s, 0) \\ \alpha u &= \alpha(x,y) = (\alpha x, \alpha y) \end{aligned}$$

Note que o produto por escalar é o usual. Nestas condições, V é um espaço vetorial?

10. Seja $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : f(-x) = \overline{f(x)}\}$ ($\overline{f(x)}$ é o conjugado do número complexo $f(x)$). Mostre que V, com as operações

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x) + g(x) \\ (cf)(x) &= cf(x), \end{aligned}$$

é um espaço vetorial real.

11. Use as propriedades de espaço vetorial para provar que se V é um espaço vetorial com $v \in V$ e $n \in \mathbb{N}$ então $n \cdot v = v + \cdots + v$ (n parcelas).

12. A propriedade comutativa dos espaços vetoriais pode ser demonstrada a partir das outras propriedades? Justifique.

13. Sejam U e V espaços vetoriais. Defina operações de soma e produto por escalar de tal modo que o conjunto $U \times V = \{(u,v) : u \in U, v \in V\}$ seja um espaço vetorial.

    Seja V um espaço vetorial e $u, v \in V$. O segmento de reta de extremidades u, v é, por definição, o conjunto

    $$[u,v] = \{(1-t)u + tv : 0 \leq t \leq 1\}.$$

    Um conjunto $X \subset V$ é chamado de convexo quando $u, v \in X \Rightarrow X$ implica que $[u,v] \in X$. (Ou seja: o segmento de reta que liga dois pontos quaisquer de X está contido em X.)

14. Mostre que a interseção $V_1 \cap \cdots \cap V_m$ de conjuntos convexos $V_1, \cdots, V_m \subset V$ é um conjunto convexo.

15. Prove que o disco $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$ é um conjunto convexo.

2. Subespaços vetoriais

Definição 2.1 Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ ($=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Diz-se que um subconjunto U de V é um *subespaço vetorial* se as seguintes propriedades são satisfeitas:

1. Se $u, v \in U$ então $u+v \in U$;
2. Se $u \in U$ então para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ tem-se que $\lambda u \in U$.

▪ **Exemplo 2.1** Verifique se $W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x+3y=0\}$ é um espaço vetorial.

Vamos mostrar que W é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$. Temos que o vetor nulo pertence a W, pois se $x=y=0$ então $2x+3y=0$. Sejam $u=(x_1,y_1), v=(x_2,y_2) \in W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ qualquer. Então,

$$\lambda u + v = \lambda(x_1,y_1)+(x_2,y_2) = (\lambda x_1 + x_2, \lambda y_1 + y_2).$$

Agora, temos

$$\begin{aligned} 2(\lambda x_1 + x_2) + 3(\lambda y_1 + y_2) &= 2\lambda x_1 + 2x_2 + 3\lambda y_1 + 3y_2 \\ &= \lambda(2x_1+3y_1) + (2x_2+3y_2) \\ &= \lambda \cdot 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Isto implica que $\lambda u + v \in W$. Logo, W é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$. ▪

▪ **Exemplo 2.2** Vamos mostrar que $S = \{(x_1,\cdots,x_n) \in \mathbb{R}^n : a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0, a_i \text{ fixados}\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$.

Temos que o vetor nulo pertence a S, pois $x_i = 0$, para todo $i = 1,\cdots,n$. Portanto, $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = a_1 \cdot 0 + \cdots + a_n \cdot 0 = 0$. Sejam $(x_1,\cdots,x_n),(y_1,\cdots,y_n) \in S$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então, note que

$$(x_1,\cdots,x_n) + \alpha(y_1,\cdots,y_n) = (x_1+\alpha y_1,\cdots,x_n+\alpha y_n).$$

Agora, temos

$$\begin{aligned} a_1(x_1+\alpha y_1)+a_2(x_2+\alpha y_2)+\cdots+a_n(x_n+\alpha y_n) &= (a_1x_1+\cdots+a_nx_n)+\alpha(a_1y_1+\cdots+a_ny_n) \\ &= 0+\alpha\cdot 0=0. \end{aligned}$$

Como a soma acima é igual a zero então a soma $(x_1,\cdots,x_n)+\alpha(y_1,\cdots,y_n)\in S$. Logo, S é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$. ∎

∎ **Exemplo 2.3** Seja S o espaço solução do sistema

$$\begin{cases} x+y+az=0 \\ x+ay+z=0 \\ ax+y+z=0 \end{cases}.$$

Determine os valores de a para os quais S seja: a própria origem; uma reta que passa pela origem; e, um plano que passa pela origem.

Toda equação geral de um plano é da forma $ax+by+cz+d=0$, com vetor normal ao plano o vetor $n=(a,b,c)$. Se $d=0$ então o vetor passa pela origem do sistema. No sistema acima, todos os três planos passam pela origem. Então há, pelo menos, uma solução para o sistema.

A matriz dos coeficientes do sistema acima é dada por

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Susbtitua: $L_2=L_1-L_2$ e $L_3=a\cdot L_1-L_3$, onde L_i significa a linha i.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1-a & a-1 \\ 0 & a-1 & a^2-1 \end{bmatrix}.$$

Substitua: $L_3=-L_3$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1-a & a-1 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 \end{bmatrix}.$$

Substitua: $L_3=L_2-L_3$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1-a & a-1 \\ 0 & 0 & a^2+a-2 \end{bmatrix}.$$

Se $a=1$ teríamos a matriz da forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-1 & 1-1 \\ 0 & 0 & 1^2+1-2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

cujo sistema equivalente ao sistema S é

$$\begin{cases} x+y+z=0 \end{cases}$$

que é a equação de um plano que passa pela origem. Portanto, a solução do sistema é um plano.

Se $a \neq 1$ então a segunda linha da matriz não se anula, mas a terceira linha ainda pode se anular, desde que exista algum $a \neq 1$ tal que $a^2+a-2=0$. Isso acontece caso $a=-2$. Neste caso, a matriz ficaria da forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

cujo sistema equivalente é o sistema

$$\begin{cases} x+y-2z=0 \\ y-z=0 \end{cases}.$$

Como o sistema é formado por dois planos não paralelos (pois seus vetores normais não são paralelos), segue que a solução deste sistema é uma reta.

Se $a \neq -2$ e $a \neq 1$ então temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1-a & a-1 \\ 0 & 0 & a^2+a-2 \end{bmatrix}.$$

Tome $L_2 = \dfrac{1}{1-a}L_2$ e $L_3 = \dfrac{1}{a^2+a-2}L_3$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, temos o sistema associado à matriz:

$$\begin{cases} x+y+az=0 \\ y-z=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}.$$

Logo, a solução é a origem do sistema $O=(0,0,0)$. ∎

∎ **Exemplo 2.4** Verifique se o conjunto solução do sistema a seguir é um espaço vetorial:

$$\begin{cases} x+y \quad -w=0 \\ x \quad -z+w=2 \\ \quad y+z-w=-3 \\ x+y \quad -2w=1 \end{cases}.$$

A matriz dos coeficientes é

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aplicamos o método da eliminação de Gauss.

Substitua $L_2 = L_1 - L_2$, $L_4 = L_1 - L_4$, daí temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Substitua $L_3 = L_2 - L_3$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Substitua $L_4 = L_3 + L_4$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

O sistema equivalente a esta matriz é dado por

$$\begin{cases} x+y-w=0 \\ y+z-2w=-2 \\ w=-1 \end{cases}$$

o que implica no sistema

$$\begin{cases} x+y=-1 \\ y+z=-4 \\ w=-1 \end{cases}$$

Portanto, a solução do sistema é da forma

$$\begin{cases} x=-1-y \\ z=-4-y \\ w=-1 \end{cases}.$$

Em termos de conjunto, temos o conjunto solução do sistema dado por:

$$S = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x = -1-y, z = -4-y \text{ e } w = -1\} = \{(-1-y,-4-y,y,-1) : y \in \mathbb{R}\}.$$

Note que $(0,0,0,0) \notin S$, pois $(x,y,z,w) \in S \implies w = -1 \neq 0$. Logo, S não é um espaço vetorial. ∎

■ **Exemplo 2.5** O conjunto das funções contínuas da reta na reta, denotado por $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ é um subespaço vetorial de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Sejam $f,g \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Obviamente, a função nula é uma função contínua. Portanto, a função nula pertence ao conjunto $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Note que

$$(f+\alpha g)(x) = f(x) + (\alpha g)(x) = f(x) + \alpha g(x).$$

Como f e g são contínuas, segue que a soma de funções contínuas ainda é uma função contínua. De fato, seja $a \in \mathbb{R}$ temos que como $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ também $\lim_{x\to a} g(x) = g(a)$, então

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a}(f+\alpha g)(x) &= \lim_{x\to a}[f(x)+\alpha g(x)] \\
&= \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} \alpha g(x) \\
&= \lim_{x\to a} f(x) + \alpha \lim_{x\to a} g(x) \\
&= f(a) + \alpha g(a) \\
&= (f+\alpha g)(a),
\end{aligned}$$

e isso mostra que $(f+\alpha g) \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$. ∎

■ **Exemplo 2.6** O conjunto das funções contínuas $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ tais que

$$\int_a^b f(x)dx = 0$$

é subespaço de $C([a,b],\mathbb{R})$.

Sejam $f,g \in S = \{f \in C([a,b],\mathbb{R}) : \int_a^b f(x)dx = 0\} \subset C([a,b],\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Queremos mostrar que $\int_a^b (f+\alpha g)(x)dx = 0$. É imediato que $0 \in S$.

$$\begin{aligned}
\int_a^b (f+\alpha g)(x)dx &= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b \alpha g(x)dx \\
&= \int_a^b f(x)dx + \alpha \int_a^b g(x)dx \\
&= 0 + \alpha 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Logo, $f+\alpha g \in S$. E assim, S é subespaço vetorial de $C([a,b],\mathbb{R})$. ∎

2.1 Interseção e somas de subespaços

Considere U, W subespaços vetoriais de um espaço V.

Teorema 2.1 A interseção de dois subespaços vetoriais é um espaço vetorial.

Demonstração. Note que $0 \in U \cap W$, pois U e W são subespaços vetoriais de V. Sejam $u, v \in U \cap W$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Temos daí que $u, v \in U$ e $u, v \in W$, e assim, para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$, vem que $u + \alpha v \in U$ e $u + \alpha v \in W$. Logo, $u + \alpha v \in U \cap W$, ou seja, $U \cap W$ é um espaço vetorial. ■

Será que a união de dois espaços vetoriais ainda é um espaço vetorial?

Sejam $U = \{(x,0); x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ e $W = \{(0,y); y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^2$ (**mostre isso**). Considere $(1,0), (0,1) \in U \cup W$. Somando estes dois vetores, temos

$$(1,0) + (0,1) = (1,1) \notin U \cup W.$$

Logo, nem sempre a união de dois espaços vetorial é um espaço vetorial.

Definição 2.2 Suponha U e W subespaços vetoriais de V. Definimos a soma de dois subespaços vetoriais como:

$$U + W = \{u + w \in V : u \in U \text{ e } w \in W\}.$$

Teorema 2.2 A soma de dois subespaços vetoriais é um espaço vetorial.

Demonstração. Suponha U e W subespaços vetoriais de V. Note que, $0 \in U + W$, pois $0 \in U$ e $0 \in W$. Sejam $v_1, v_2 \in U + W$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Observe que existem $u_1, u_2 \in U$ e $w_1, w_2 \in W$ tais que

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1 + w_1 \\ v_2 &= u_2 + w_2. \end{aligned}$$

Então,

$$v_1 + \alpha v_2 = (u_1 + w_1) + \alpha(u_2 + w_2) = (u_1 + \alpha u_2) + (w_1 + \alpha w_2).$$

Como U é subespaço vetorial de V então $u_1 + \alpha u_2 \in U$, para todos $u_1, u_2 \in U$. Da mesma forma, $w_1 + \alpha w_2 \in W$. Portanto, $v_1 + \alpha v_2 \in U + W$. Logo, $U + W$ é um subespaço vetorial de V. ■

2.1.1 Soma direta

Definição 2.3 Diz-se que $U+W$ é *soma direta* se $U \cap W = \{0\}$. Neste caso, usamos a notação $U \oplus W$.

▪ **Exemplo 2.7** Sejam $U = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$ e $W = \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\}$. Temos que a soma

$$U+W = \{(x,0)+(0,y) : x,y \in \mathbb{R}\} = \{(x,y) : x,y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2.$$

Por outro lado, $U \cap W = \{(0,0)\}$. Logo, $\mathbb{R}^2$ é a soma direta dos espaços U e W, ou seja $\mathbb{R}^2 = U \oplus W$. Neste caso, cada elemento de $\mathbb{R}^2$ é escrito de maneira única como a soma de um elemento de U com um elemento de W. Por exemplo:

$$(5,1) = (5,0)+(0,1)$$

e não existe outra forma de escrever esta soma usando os subespaços U e W.

Também, note que $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \oplus \{(0,0)\}$. Isso significa que a soma é única, isto é, que cada elemento de $\mathbb{R}^2$ é obtido por apenas uma maneira, como a soma dos elementos de U e W. ▪

▪ **Exemplo 2.8** $U = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} : a,b \in \mathbb{R} \right\}$, $W = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & c \\ 0 & d \end{bmatrix} : c,d \in \mathbb{R} \right\}$ são subespaços vetoriais do espaço das matrizes quadradas de ordem 2. Vamos calcular $U \cap W$ e $U+W$. A soma $U+W$ é direta?

Podemos reescrever os espaços acima como $U = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) : y = z = 0 \right\}$ e $W = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) : x = z = 0 \right\}$. Portanto,

$$\begin{aligned} U \cap V &= \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) : y = z = 0 \text{ e } x = z = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) : x = y = z = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & w \end{bmatrix} : w \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Agora, calculamos $U+W$:

$$\begin{aligned} U+W &= \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & c \\ 0 & d \end{bmatrix} : a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} a & c \\ 0 & b+d \end{bmatrix} : a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & w \end{bmatrix} : x,y,w \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Além disso, temos que a soma $U+W$ não é direta, pois a interseção não é trivial, i.e., $U \cap W \neq \{0\}$. ▪

Teorema 2.3 Sejam U e V subespaços vetoriais de um espaço vetorial $V(\mathbb{K})$ tais que $V = U \oplus W$. Mostre que cada elemento de V se escreve de maneira única como a soma de um elemento de U e um elemento de W.

Demonstração. Seja v um vetor arbitrário de V. Como $V = U \oplus W$, então existem $u_1 \in U$ e $w_1 \in W$ tais que $v = u_1 + w_1$. Suponha que existem $u_2 \in U$ e $w_2 \in W$ tais que $v = u_2 + w_2$. Então, $u_1 + w_1 = u_2 + w_2$, o que implica que $u_1 - u_2 = w_2 - w_1$. Como $u_1 - u_2 \in U$ e $w_2 - w_1 \in W$ e $u_1 - u_2 = w_2 - w_1$, segue que $u_1 - u_2, w_2 - w_1 \in U \cap W$. Mas $U \cap W = \{0\}$, pois a soma é direta. Assim, $u_1 - u_2 = 0$ e $w_1 - w_2 = 0$. Logo, $u_1 = u_2$ e $w_1 = w_2$. ■

2.2 Exercícios

1. Dado o espaço vetorial $W = \{(x,y,z) \in R^3 : x+y+z = 0\}$, verifique se os seguintes vetores pertencem a W:

   a. $(1,0,-1)$; b. $(2,3,-5)$.

2. Verifique se os seguintes conjuntos são espaços vetoriais.
   a. $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x-3y+z = 0\}$;
   b. $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$;
   c. $V = \{p \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R}); p(0) = 0\}$;
   d. $V = \left\{ \begin{bmatrix} x+y & z-x \\ y-z & x-y-1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) : x,y,z \in \mathbb{R} \right\}$;
   e. $V = \{A \in M_n : A^2 = A\}$;
   f. $V = \{a+bt+ct^5 : a,b,c \in \mathbb{R}\}$;
   g. $V = \{f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) : f(-x) = -f(x)\}$.

3. O conjunto das matrizes simétricas de ordem n é um espaço vetorial? E quanto as matrizes antissimétricas de ordem n?

4. Verifique se o conjunto solução dos seguintes sistemas lineares são espaços vetoriais:

   a. $\begin{cases} x+y = 1 \\ x-y = 0 \end{cases}$;

   b. $\begin{cases} x-3x+z = 0 \\ x+y+z = 0 \\ x-y+z = 0 \end{cases}$;

   c. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$;

   d. $\begin{cases} x+2y-z+3w = 0 \\ 3x-2y+4z-w = 0 \\ -2x+4y+z = 0 \end{cases}$.

5. Verifique que $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x-y = 0\}$ e $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y = 0\}$ são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^2$. A seguir, calcule $U \cap V$ e $U+V$. É verdade que $U \oplus V = \mathbb{R}^2$? Justifique.

6. Considere o subespaço vetorial $W = \{f(x) \in C^1(\mathbb{R}) : f'(0) = 0\}$ de $C^1(\mathbb{R})$, o espaço vetorial das funções continuamente diferenciáveis em $\mathbb{R}$. Mostre que W é um subespaço vetorial de $C^1(\mathbb{R})$.

7. Verifique que

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\} \text{ e } V = \left\{ \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & w \end{bmatrix} : z, w \in \mathbb{R} \right\}$$

   são espaços vetoriais. Calcule, $U+V$ e $U \cap V$. $U+V$ é soma direta? Justifique.

8. Mostre que as retas que passam pela origem são os únicos subespaços vetoriais próprios de $\mathbb{R}^2$. *(Um subespaço vetorial W de V é dito próprio se $W \neq \{0\}$ e $W \neq V$).*

9. Considere os espaços vetoriais $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z = 0\}$ e $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y\}$. Calcule $U+W$, $U \cap W$ e determine se $U+W$ é a soma direta de U e W.

10. Verifique se o conjunto $\{f \in C^0([0,1],\mathbb{R}) : \int_0^1 f(x)dx = 0\}$ é subespaço vetorial do espaço das funções reais contínuas definidas no intervalo $[0,1]$, $C^0([0,1],\mathbb{R})$.

11. Considere o espaço vetorial das funções reais definidas em $[0,1]$ com as operações usuais de soma e multiplicação por escalar. Sejam U e W os subespaços vetoriais das funções pares e ímpares, respectivamente. Mostre que $U+W$ é a soma direta de U e W.

12. Sejam V um espaço vetorial complexo e U um subespaço vetorial de V. Mostre que U é fechado sob a conjugação, isto é, se $u \in U$, então $\overline{u} \in U$, onde $\overline{u}$ é o conjugado de u. *(Lembre que o conjugado do número complexo $z = a+bi$ é o número $\overline{z} = a-bi$).*

3. Combinação e dependência linear

3.1 Combinação linear

Definição 3.1 Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ real ou complexo, $v_1, \cdots, v_n \in V$ e $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{K}$. O vetor

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$$

é chamado de *combinação linear* dos vetores $v_1, \cdots, v_n \in V$.

▪ **Exemplo 3.1** Seja $V(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^2 = \{(z_1, z_2) : z_1, z_2 \in \mathbb{C}\}$. Sejam $v_1 = (1, i)$ e $v_2 = (i, 1)$ então

$$3v_1 - 2v_2 = 3(1, i) - 2(i, 1) = (3 - 2i, -2 + 3i)$$

é uma combinação linear de v_1 e v_2. Da mesma forma,

$$2v_1 + iv_2 = 2(1, i) + i(i, 1) = (2 + i^2, 2i + i) = (2 - 1, 3i) = (1, 3i)$$

é outra combinação linear dos vetores v_1 e v_2. ▪

▪ **Exemplo 3.2** O conjunto gerado pelo vetor $v = (1, 2) \in \mathbb{R}^2$ é o conjunto

$$S_v = \{av : a \in \mathbb{R}\} = \{(a, 2a) : a \in \mathbb{R}\}.$$

▪

Proposição 3.1 Seja V um espaço vetorial. O conjunto W formado por todos os vetores de V que são combinações lineares dos vetores $v_1, \cdots, v_n \in V$ é um subespaço vetorial de V.

Demonstração. De fato, note que $0 \in W$, basta tomar todos os escalares de $\mathbb{K}$ nulos, i.e.,

$$0v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_n = 0.$$

Sejam $u, v \in W$. Então existem $a_i, b_i \in \mathbb{K}$, $i = 1, \cdots, n$ tais que

$$\begin{aligned} u &= a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n \\ v &= b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n. \end{aligned}$$

Para $\lambda \in \mathbb{K}$ qualquer, temos

$$\begin{aligned} \lambda u + v &= \lambda(a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n) + (b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n) \\ &= (\lambda a_1 + b_1) v_1 + \cdots + (\lambda a_n + b_n) v_n. \end{aligned}$$

Portanto, $\lambda u + v \in W$, pois é escrito como combinação linear dos vetores $v_1, \cdots, v_n \in V$. Logo, W é subespaço vetorial de V. ■

Nos termos da afirmação acima, W é chamado de *subespaço gerado* por $v_1, \cdots, v_n \in V$ e é denotado por

$$W = [v_1, \cdots, v_n].$$

▪ **Exemplo 3.3** Seja $V = \mathbb{R}^2$. Sejam $u = (1,1)$ e $w = (1,0)$. Note que o vetor $(0,0) = 0 \cdot u + 0 \cdot w$. Veja também que

$$3u + 2w = 3(1,1) + 2(1,0) = (3,3) + (2,0) = (5,3).$$

Seja $v = (-2,3)$ achemos a combinação linear dos vetores u e w e números $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $v = au + bw$,

$$\begin{aligned} v = au + bw &\Rightarrow (-2,3) = a(1,1) + b(1,0) \\ &\Rightarrow (-2,3) = (a,a) + (b,0) \\ &\Rightarrow (-2,3) = (a+b,a) \\ &\Rightarrow \begin{cases} a + b = -2 \\ a = 3 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -5 \end{cases}. \end{aligned}$$

De uma maneira geral, seja $v = (x,y)$ um vetor qualquer em $\mathbb{R}^2$. Vejamos se os vetores u e w, podem gerar qualquer vetor de $\mathbb{R}^2$. Temos

$$\begin{aligned} v = au + bw &\Rightarrow (x,y) = a(1,1) + b(1,0) \\ &\Rightarrow (x,y) = (a,a) + (b,0) \\ &\Rightarrow (x,y) = (a+b,a) \\ &\Rightarrow \begin{cases} a + b = x \\ a = y \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} b = x - y \\ a = y \end{cases}. \end{aligned}$$

Logo, qualquer vetor de $\mathbb{R}^2$, pode ser gerado a partir dos vetores u e w, onde

$$(x,y) = y(1,1) + (x-y)(1,0).$$

E isso mostra que o conjunto $\{(1,1),(1,0))\}$ gera todo o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$. Em notação, $\mathbb{R}^2 = [(1,1),(1,0)]$.

Existem geradores chamados de *geradores canônicos*. Para o espaço $\mathbb{R}^2$, por exemplo, temos

$$\mathbb{R}^2 = [(1,0),(0,1)].$$

De fato, é imediato que

$$(x,y) = x(1,0) + y(0,1).$$

Sejam $u = (1,2)$ e $w = (-2,-4)$, observe que nem todos os vetores de $\mathbb{R}^2$ podem ser gerados pelos vetores u e w. De fato,

$$\begin{aligned} (x,y) &= a(1,2) + b(-2,-4) \\ &= (a-2b, 2a-4b) \\ &\Rightarrow \begin{cases} a-2b = x \\ 2a-4b = y \end{cases}. \end{aligned}$$

Multiplicando a equação 2 por $1/2$, temos o sistema

$$\begin{cases} a-2b = x \\ a-2b = \frac{y}{2} \end{cases}.$$

Da equação 2 temos que $a = \frac{y}{2} + 2b$ e substituindo na equação 1 vem que

$$a-2b = x \implies 2b = a-x \implies 2b = \frac{y}{2} + 2b - x \implies x = \frac{y}{2}.$$

Isto é, existe uma dependência entre x e y. Portanto, o sistema acima é impossível. O vetor $(1,1)$ não é gerado pelos vetores u e w, por exemplo. ∎

∎ **Exemplo 3.4** Seja $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ o espaço vetorial de todos os polinômios de grau menor ou igual a 3, i.e.,

$$\mathscr{P}_3(\mathbb{R}) = \{a + bt + ct^2 + dt^3 : a,b,c,d \in \mathbb{R}\}.$$

Sejam $p(t) = 1$, $q(t) = t-1$, $r(t) = t^2 - t$ e $s(t) = t^3$. Sejam $a = 1, b = 2, c = 3, d = 4$, temos

$$\begin{aligned} a \cdot p(t) + b \cdot q(t) + c \cdot r(t) + d \cdot s(t) &= 1 \cdot 1 + 2 \cdot (t-1) + 3 \cdot (t^2 - t) + 4 \cdot t^3 \\ &= 1 + 2t - 2 + 3t^2 - 3t + 4t^3 \\ &= -1 - t + 3t^2 + 4t^3. \end{aligned}$$

Seja $u(t) = 4 - 3t + \frac{1}{2}t^2$. Vamos achar as coordenadas (escalares) de $u(t)$ em relação aos vetores $p(t), q(t), r(t), s(t)$.

$$\begin{aligned}
4 - 3t + \frac{1}{2}t^2 &= a \cdot p(t) + b \cdot q(t) + c \cdot r(t) + d \cdot s(t) \\
&= a \cdot 1 + b \cdot (t-1) + c \cdot (t^2 - t) + d \cdot t^3 \\
&= a + b \cdot t - b + c \cdot t^2 - c \cdot t + d \cdot t^3 \\
4 - 3t + \frac{1}{2}t^2 + 0 \cdot t^3 &= a - b + (b-c) \cdot t + c \cdot t^2 + d \cdot t^3 \\
&\Rightarrow \begin{cases} a - b = 4 \\ b - c = -3 \\ c = \frac{1}{2} \\ d = 0 \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = -\frac{5}{2} \\ c = \frac{1}{2} \\ d = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Logo, $u(t) = \frac{3}{2}p(t) - \frac{5}{2}q(t) + \frac{1}{2}r(t) + 0 \cdot s(t)$.

Uma pergunta natural é se estes vetores geram qualquer vetor de $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$. Seja $x(t) = \alpha + \beta t + \gamma t^2 + \delta t^3$ um polinômio qualquer de $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$. Temos

$$\begin{aligned}
\alpha + \beta t + \gamma t^2 + \delta t^3 &= a \cdot p(t) + b \cdot q(t) + c \cdot r(t) + d \cdot s(t) \\
&= a \cdot 1 + b \cdot (t-1) + c \cdot (t^2 - t) + d \cdot t^3 \\
&= a + b \cdot t - b + c \cdot t^2 - c \cdot t + d \cdot t^3 \\
&= a - b + (b-c) \cdot t + c \cdot t^2 + d \cdot t^3 \\
&\Rightarrow \begin{cases} a - b = \alpha \\ b - c = \beta \\ c = \gamma \\ d = \delta \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} a = \alpha + b = \alpha + \beta + \gamma \\ b = \beta + \gamma \\ c = \gamma \\ d = \delta \end{cases}
\end{aligned}$$

Logo, $x(t) = (\alpha + \beta + \gamma)p(t) + (\beta + \gamma)q(t) + \gamma r(t) + \delta s(t)$. E isso mostra que o conjunto $\{p(t), q(t), r(t), s(t)\}$ gera todo o espaço vetorial $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$. Em notação,

$$\mathscr{P}_3(\mathbb{R}) = [1, t-1, t^2 - t, t^3].$$

É possível gerar o polinômio $x(t) = t$ se considerarmos o espaço gerado pelos polinômios $\{t-1, t^2-t, t^3\}$? Vejamos:

$$\begin{aligned} t &= b\cdot(t-1) + c\cdot(t^2-t) + d\cdot t^3 \\ 0+1\cdot t+0\cdot t^2+0\cdot t^3 &= -b+(b-c)t+ct^2+dt^3 \\ &\Rightarrow \begin{cases} -b=0 \\ b-c=1 \\ c=0 \\ d=0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} b=0 \\ c=-1 \\ c=0 \\ d=0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Como o sistema acima é impossível, temos que não existem coeficientes que geram o polinômio $x(t) = t$ a partir do geradores $\{t-1, t^2-t, t^3\}$.

O conjunto gerador canônico de $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ é o conjunto $\{1, t, t^2, t^3\}$.

Pode-se relacionar o espaço $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ com o espaço $\mathbb{R}^4$, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathscr{P}_3(\mathbb{R}) &\to \mathbb{R}^4 \\ a+bt+ct^2+dt^3 &\mapsto (a,b,c,d). \end{aligned}$$

Note que φ é uma função bijetiva (spoiler: φ é um isomorfismo).

■

■ **Exemplo 3.5** Encontrar o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado por $S = \{(1,1,1),(2,2,0)\}$. Lembre que qualquer elemento gerado por S é uma combinação linear dos elementos de S. Temos, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, que

$$x(1,1,1) + y(2,2,0) = (x+2y, x+2y, x).$$

Veja que $(1,0,0) \notin [S]$ (lê-se: o espaço gerado por S).

Logo, $[S] = \{(x+2y, x+2y, x) : x, y \in \mathbb{R}\} = \{(x,x,y); x, y \in \mathbb{R}\} \subsetneq \mathbb{R}^3$. ■

■ **Exemplo 3.6** $S = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \subset \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$.

Lembre que qualquer elemento gerado por S é uma combinação linear dos elementos de S. Temos, daí que

$$x \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & x \\ -y & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, $[S] = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & x \\ -y & 0 \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{K} \right\} \subset \mathbb{M}_2$. ■

▪ **Exemplo 3.7** Encontrar o conjunto S que gera o espaço $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x-2y=0\}$. Note que W pode ser escrito como $W = \{(2y,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y,z \in \mathbb{R}\}$. Observe que

$$(2y,y,z) = (2y,y,0)+(0,0,z) = y(2,1,0)+z(0,0,1).$$

Logo, $S = \{(2,1,0),(0,0,1)\}$.

▪

▪ **Exemplo 3.8** $W = \{A \in \mathbb{M}_2 : A^t = A\}$.

Seja $A \in W$, temos que se $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, então a igualdade $A^t = A$ nos dá

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow b = c.$$

Vamos reescrever o subespaço W:

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} : a,b,d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \\ &= a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Logo, $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ é o conjunto de geradores do espaço W. ▪

▪ **Exemplo 3.9** Seja $W = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^4 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\} \subset \mathscr{P}_4(\mathbb{R})$. Queremos encontrar os geradores de W.

Observe que

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^4 = a_0 \cdot 1 + a_1 t + a_2 t^4.$$

Logo, $S = \{1, t, t^4\}$ é o conjunto de geradores do espaço W. ▪

3.2 Dependência e independência linear

Seja V um espaço vetorial e $v_1, \cdots, v_n$ vetores não nulos de V.

Definição 3.2 Diz-se que os vetores não nulos $v_1, \cdots, v_n$ são *linearmente independentes* (LI) se a combinação linear

$$a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0$$

implica que $a_1 = \cdots = a_n = 0$. Caso contrário, diz-se que são *linearmente dependentes* (LD). Isto é, se algum $a_i \neq 0$ então os vetores $v_1, \cdots, v_n$ são LD.

▪ **Exemplo 3.10** Sejam $u=(1,1)$ e $v=(1,-1)$ vetores de $\mathbb{R}^2$. Tome $a,b\in\mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} au+bv=0 &\Rightarrow a(1,1)+b(1,-1)=(0,0)\\ &\Rightarrow (a+b,a-b)=(0,0)\\ &\Rightarrow \begin{cases} a+b=0\\ a-b=0 \end{cases}\\ &\Rightarrow a=b=0. \end{aligned}$$

Logo, os vetores u e v são LI. ▪

▪ **Exemplo 3.11** Sejam $u=(1,1)$ e $v=(-1,-1)$ vetores de $\mathbb{R}^2$. Note que

$$u=-v\Rightarrow u+v=0,$$

ou seja, $a=b=1$. Logo, neste caso, u e v são LD. ▪

▪ **Exemplo 3.12** Sejam $u=(x_1,y_1,z_1)$, $v=(x_2,y_2,z_2)$ e $w=(x_3,y_3,z_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

Queremos encontrar condições para que estes 3 vetores sejam LI. Pela definição sabemos que u,v,w são LI se $au+bv+cw=0$ implicar que $a=b=c=0$.

$$\begin{aligned} au+bv+cw=0 &\Rightarrow a(x_1,y_1,z_1)+b(x_2,y_2,z_2)+c(x_3,y_3,z_3)=(0,0,0)\\ &\Rightarrow (ax_1+bx_2+cx_3,ay_1+by_2+cy_3,az_1+bz_2+cz_3)=(0,0,0)\\ &\Rightarrow \begin{cases} ax_1+bx_2+cx_3=0\\ ay_1+by_2+cy_3=0\\ az_1+bz_2+cz_3=0 \end{cases}, \end{aligned}$$

cuja matriz dos coeficientes é

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix}.$$

Para que o sistema homogêneo acima tenha solução unica, que é a solução trivial ($a=b=c=0$), temos que a matriz dos coeficientes deve ter determinante diferente de zero. Isto é suficiente para que os vetores u,v,w sejam LI. ▪

▪ **Exemplo 3.13** Se $u=(1,0,1)$, $v=(0,1,1)$ e $w=(-1,0,0)$ de $\mathbb{R}^3$ então

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}=1\neq 0.$$

Logo, os vetores u,v,w são LI. ▪

▪ **Exemplo 3.14** Vejamos se o subconjunto dado é LI ou LD:

$$S=\left\{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0\\ 3 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0\\ 10 & 5 & 7\\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}.$$

Temos que dados $a,b,c \in \mathbb{R}$ então:

$$a\begin{bmatrix}1&2&0\\3&0&1\\0&0&2\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}-1&-1&-1\\0&0&0\\1&1&1\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}0&0&0\\10&5&7\\-1&0&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}a-b&2a-b&-b\\3a+10c&5c&a+7c\\b-c&b&2a+b+c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad a=b=c=0$$

Logo, o conjunto S é LI. ∎

∎ **Exemplo 3.15** $S=\{1,\cos^2 x,\operatorname{sen}^2 x\} \subset C^\infty(\mathbb{R})$ é LI?

Sabemos, da trigonometria, que $\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x=1$, o que implica que $1-\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x=0$. Logo, existem coeficientes não nulos tais que a combinação dos vetores de S é nula. Assim, S é LD. ∎

∎ **Exemplo 3.16** O conjunto $S=\{\cos x,\operatorname{sen} x\}$ é LI. Pois, se

$$a\operatorname{sen} x+b\cos x=0$$

então tomando $x=0$, teremos, $a\operatorname{sen}0+b\cos 0=0\Rightarrow b=0$. Por outro lado, se $x=\frac{\pi}{2}$ então $a\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}+b\cos\frac{\pi}{2}=0\Rightarrow a=0$. Logo, S é LI. ∎

3.3 Exercícios

1. Sejam $v_1=(1,2,1)$, $v_2=(0,1,-1)$ e $v_3=(1,1,2)$ vetores de $\mathbb{R}^3$:
   a. O vetor $u=(4,7,5)$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores v_1,v_2 e v_3?
   b. O conjunto $\{v_1,v_2,v_3\}$ é linearmente independente? Justifique.
   c. O conjunto $\{v_1,v_2,v_3\}$ gera o espaço $\mathbb{R}^3$? Justifique.

2. Seja o espaço vetorial $V=R^2$. Considere os vetores $u=(1,2)$ e $v=(2,4)$. Mostre que v é linearmente dependente em relação a u.

3. Mostre que se u e v são vetores de $\mathbb{R}^2$ linearmente dependentes, então existe $k\in\mathbb{R}$ tal que $u=kv$. Em outras palavras, para que dois vetores quaisquer de $\mathbb{R}^2$ sejam LD, basta que um seja múltiplo do outro.

4. Encontre condições matriciais para as quais os vetores (x_1,y_1) e (x_2,y_2), pertencentes a $\mathbb{R}^2$, sejam linearmente independentes. *(Dica: reproduza os passos usados no Exemplo 3.12).*

5. Seja o espaço vetorial $V=R^3$. Verifique se os vetores $u=(1,2,3)$, $v=(2,4,6)$ e $w=(-1,-2,-3)$ são linearmente independentes ou dependentes.

6. Ache condições matriciais para as quais os vetores $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{R}^4$ sejam linearmente independentes. Tente generalizar isso para o espaço $\mathbb{R}^n$.

7. Classifique os conjuntos a seguir como linearmente independente (LI) ou linearmente dependente (LD):
   a. $\{(1,2),(2,1)\} \subset \mathbb{R}^2$;
   b. $\{1,i\} \subset V(\mathbb{R}) = \mathbb{C}$, isto é, $\mathbb{C}$ é um espaço vetorial real;
   c. $\{1,i\} \subset V(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$, ou seja, $\mathbb{C}$ é um espaço vetorial complexo;
   d. $\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\} \subset \mathbb{R}^3$;
   e. $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\} \subset \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$;
   f. $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i & -i \\ 0 & i \end{bmatrix} \right\} \subset \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$;
   g. $\left\{1, 1+t, 2t^2-1, t^3\right\} \subset \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$;
   h. $\left\{x^2+2x-1, 2x^2-3x+1, 3x^2-x-2\right\} \subset \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$;
   i. $\{\sinh x, \cosh x\} \subset \mathscr{F}(\mathbb{R})$;
   j. $\{(1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0)\} \subset \mathbb{R}^4$.

8. Determinar a para que o conjunto $\{(1,1,3),(0,a,2),(1,0,a)\}$ seja linearmente independente.

9. Verifique se os seguintes conjuntos geram o espaço vetorial $V(\mathbb{K})$ dado:
   a. $\{(1,1),(0,1)\}$, onde $V(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2$;
   b. $\{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$, onde $V(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^3$;
   c. $\left\{2, 1-t, t^2-t^3\right\}$, onde $V(\mathbb{R}) = \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$;
   d. $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i & -i \\ 0 & i \end{bmatrix} \right\}$, onde $V(\mathbb{C}) = \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$.

10. Considere os espaços vetoriais da matrizes simétricas $U = \{B \in \mathbb{M}_n : B^t = B\}$ e antissimétricas $V = \{C \in \mathbb{M}_n : C^t = -C\}$:
    a. Mostre que toda matriz $A \in \mathbb{M}_n$ pode ser escrita como a soma de uma matriz simétrica e uma matriz antissimétrica.
    b. Mostre que $\mathbb{M}_n = U \oplus V$.

11. O conjunto $\{1\}$ gera o espaço vetorial complexo $\mathbb{C}$? E quanto ao espaço vetorial real $\mathbb{C}$? Justifique.

12. Os números complexos da forma e^z, onde $z \in \mathbb{C}$, podem ser escritos como combinação linear dos vetores $z_1 = 1$ e $z_2 = i$? Justifique.

13. Prove que $\{1, e^x, e^{2x}, e^{3x}, e^{4x}\}$ é um conjunto linearmente independente no espaço $C^\infty(\mathbb{R})$. *(Dica: tente usar derivadas.)*

14. Sejam A e B subconjuntos LI do espaço vetorial V. Se $A \subset B$, mostre que $A \cup B$ é LI.

4. Base e dimensão de um espaço vetorial

4.1 Base de um espaço vetorial

Definição 4.1 Seja $S = \{v_1, \cdots, v_n\}$ vetores não nulos de um espaço vetorial V. Diz-se que S é uma base de V se:

1. S é LI;
2. S gera V, isto é, $V = [v_1, \cdots, v_n]$ (lê-se: "V é gerado pelos vetores $v_1, \cdots, v_n$").

Chamamos de *base canônica* a base mais intuitiva (ou a mais óbvia) para a estrutura do espaço vetorial.

▪ **Exemplo 4.1 Exemplos clássicos: bases canônicas**

1. Seja $V = \mathbb{R}$. A base canônica de $\mathbb{R}$ é $B = \{1\}$.
2. Se $V = \mathbb{R}^2$. A base canônica de V é $B = \{(1,0),(0,1)\}$. Note que B gera $\mathbb{R}^2$, pois sendo (x,y) um vetor qualquer de $\mathbb{R}^2$ temos que

$$(x,y) = x(1,0) + y(0,1).$$

   Além disso, esses vetores são LIs, pois

$$a(1,0) + b(0,1) = (0,0) \implies (a,b) = (0,0) \implies a = b = 0.$$

3. Seja $V(\mathbb{R}) = \mathbb{C} = \{a + bi : a,b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$. A sua base canônica é $B = \{1, i\}$.
4. Seja $V = \mathbb{R}^3$. A sua base canônica é o conjunto $B = \{e_1, e_2, e_3\}$, onde $e_1 = \vec{i} = (1,0,0)$, $e_2 = \vec{j} = (0,1,0)$ e $e_3 = \vec{k} = (0,0,1)$. Obviamente estes vetores são LI e geram todo o espaço $\mathbb{R}^3$:

$$(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1) = xe_1 + ye_2 + ze_3.$$

Para conferir que os vetores são LI, podemos calcular o determinante da matriz, onde cada linha é formada pela coordenadas de cada um dos vetores e_1, e_2 e e_3.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como o determinante da matriz acima é diferente de zero, segue que os vetores e_1, e_2 e e_3 são LIs.

5. Seja $V = \mathbb{R}^n$. A base canônica de $\mathbb{R}^n$ é o conjunto $B = \{e_1, e_2, e_3, \cdots, e_n\}$, onde $e_i = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$ indica o vetor com a i-ésima coordenada igual a 1 e todas as outras coordenadas iguais a 0. Note que um vetor qualquer $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ pode ser escrito como
$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n.$$

6. Se $V(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$. A sua base canônica é $B = \{1\}$. O conjunto $\{1, i\}$ não pode ser base de $\mathbb{C}$ como um espaço vetorial complexo. De fato, note que
$$z_1 \cdot 1 + z_2 \cdot i = 0$$
Como $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ basta tomar $z_1 = i$ e $z_2 = -1$. Isso mostra que o conjunto $\{1, i\}$ é LD, se $\mathbb{C}$ for visto como um espaço vetorial complexo.
7. Sendo $V(\mathbb{R}) = \mathbb{C}^2 = \{(z_1, z_2) : z_1, z_2 \in \mathbb{C}\}$. A base canônica do $\mathbb{R}$-espaço vetorial $\mathbb{C}^2$ é o conjunto $B = \{(1,0), (0,1), (i,0), (0,i)\}$. Note que
$$a(1,0) + b(i,0) + c(0,1) + d(0,i) = (a + bi, c + di) \in \mathbb{C}^2.$$
Alem disso, os vetores de B são LI:
$$\begin{aligned} a(1,0) + b(i,0) + c(0,1) + d(0,i) = (0,0) &\implies (a + bi, c + di) = (0,0) \\ &\implies a = b = c = d = 0. \end{aligned}$$

8. Sendo $V(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^2$. A base canônica de $\mathbb{C}$, como um espaço vetorial complexo, é o conjunto $B = \{(1,0), (0,1)\}$. Note que
$$(z_1, z_2) = z_1(1,0) + z_2(0,1).$$

9. Se $V = \mathscr{P}_n$, o espaço vetorial dos polinômios com grau menor ou igual a n, $n \in \mathbb{N}$ fixado. A base canônica de $= \mathscr{P}_n$ é $B = \{1, t, t^2, \cdots, t^n\}$.
10. Seja $V = \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$. A sua base canônica é
$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$
Tome uma matriz qualquer de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, temos
$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

11. Seja $V = \mathbb{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$. A sua base canônica é

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

■

Teorema 4.1 Seja $V = [v_1, \cdots, v_n]$. Então do conjunto $\{v_1, \cdots, v_n\}$ pode-se extrair uma base para V.

Demonstração. Se o conjunto $\{v_1, \cdots, v_n\}$ é LI, nada temos a demonstrar. Suponha $\{v_1, \cdots, v_n\}$ um conjunto LD. Então a equação

$$a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0$$

implica que $a_i \neq 0$, para algum i. Suponha, sem perda de generalidade, que $a_n \neq 0$, então

$$v_n = -\frac{1}{a_n}(a_1 v_1 + \cdots + a_{n-1} v_{n-1}).$$

Ou seja, v_n é uma combinação linear dos vetores $v_1, \cdots, v_{n-1}$. Portanto, $V = [v_1, \cdots, v_{n-1}]$. Se o conjunto $\{v_1, \cdots, v_{n-1}\}$ é LI, nada temos a acrescentar. Se for LD então podemos supor $a_{n-1} \neq 0$ e então v_{n-1} é combinação linear dos vetores $v_1, \cdots, v_{n-2}$. Como o conjunto gerador de V é finito, temos uma quantidade finita de passos até achar um conjunto LI e que gera V. ■

▪ **Exemplo 4.2** Para ilustrar uma aplicação do teorema acima, considere

$$\mathbb{R}^3 = [(1,0,1),(1,1,0),(0,1,1),(1,1,1)].$$

Vejamos se os vetores geradores de $\mathbb{R}^3$ acima são linearmente independentes. Sejam $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ tais que

$$x(1,0,1) + y(1,1,0) + z(0,1,1) + t(1,1,1) = (0,0,0).$$

Então,

$$\begin{aligned} (x,0,x) + (y,y,0) + (0,z,z) + (t,t,t) &= (0,0,0) \implies \\ (x+y+t, y+z+t, x+z+t) &= (0,0,0), \end{aligned}$$

ao qual podemos representar pelo sistema

$$\begin{cases} x+y \quad +t = 0 \\ \quad y+z+t = 0 \\ x \quad +z+t = 0 \end{cases}.$$

Note que o sistema acima tem grau de liberdade um, isso significa que o sistema admite solução diferente da trivial. Assim, nem todos os coeficientes x, y, z, t são nulos. Logo, o conjunto $S = \{(1,0,1),(1,1,0),(0,1,1),(1,1,1)\}$ é linearmente dependente. Deste conjunto, segundo o Teorema 4.1, podemos extrair uma base para $\mathbb{R}^3$. De fato, o conjunto $\{(1,0,1),(1,1,0),(0,1,1)\}$ é uma base para $\mathbb{R}^3$. ▪

O teorema a seguir mostra que se V tem uma base com n elementos então qualquer subconjunto LI de V tem no máximo n elementos.

Teorema 4.2 Se o espaço vetorial V é gerado por n vetores, então qualquer conjunto com mais de n vetores é LD.

Demonstração. Suponha $V = [v_1, \cdots, v_n]$. Pelo teorema anterior, pode-se extrair uma base para V a partir dos vetores $v_1, \cdots, v_n$. Suponha que $v_1, \cdots, v_k$ seja tal base ($k \leq n$). Sejam $w_1, \cdots, w_m$ vetores não nulos quaisquer de V, $m > n$. Para cada $j = 1, \cdots, m$ temos

$$w_j = a_{1j}v_1 + a_{2j}v_2 + \cdots + a_{kj}v_k = \sum_{i=1}^{k} a_{ij}v_i.$$

Tome a equação

$$x_1w_1 + x_2w_2 + \cdots + x_mw_m = 0.$$

Temos

$$\begin{aligned} x_1 \sum_{i=1}^{k} a_{i1}v_i + x_2 \sum_{i=1}^{k} a_{i2}v_i + \cdots + x_m \sum_{i=1}^{k} a_{im}v_i &= 0 \Rightarrow \\ \left(\sum_{j=1}^{m} x_j a_{1j}\right) v_1 + \left(\sum_{j=1}^{m} x_j a_{2j}\right) v_2 + \cdots + \left(\sum_{j=1}^{m} x_j a_{kj}\right) v_k &= 0. \end{aligned}$$

Como os vetores $v_1, \cdots, v_k$ são LI, segue que

$$\sum_{j=1}^{m} x_j a_{ij} = 0, \forall i = 1, \cdots, k.$$

Isto nos dá um sistema linear homogêneo com m incógnicas e k equações

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} x_j a_{1j} = 0 \\ \sum_{j=1}^{m} x_j a_{2j} = 0 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{m} x_j a_{kj} = 0 \end{cases}.$$

Como $k \leq n < m$ segue que o sistema tem uma solução para x_j não trivial. Logo, $w_1, \cdots, w_m$ é LD. ■

Corolário 4.1 Qualquer base de um espaço vetorial tem sempre o mesmo número de elementos.

Demonstração. Considere $B_1 = \{v_1, \cdots, v_n\}$ e $B_2 = \{w_1, \cdots, w_m\}$ bases do espaço vetorial V. Como B_1 gera o espaço V e B_2 é LI então $m \leq n$, pelo Teorema 4.2. Do mesmo modo, como B_2 gera o espaço V e B_1 é LI então $n \leq m$. Logo, $m = n$. ■

4.2 Dimensão de um espaço vetorial

Definição 4.2 A *dimensão* de um espaço vetorial $V \neq \{0\}$ é igual à quantidade de elementos de sua base (qualquer que seja a base de V, a quantidade de elementos é sempre a mesma, conforme o Corolário 4.1). A notação usada é $\dim V$.

Se $V = \{0\}$ é o espaço nulo então $\dim V = 0$, por convenção. Portanto, a base do espaço nulo é vazia.

Se a base de um espaço vetorial é finita diz-se que tal espaço é finitamente gerado ou que tem dimensão finita.

▪ **Exemplo 4.3**

1. $\dim \mathscr{P}_3(\mathbb{R}) = 4$, pois sua base canônica $\{1, t, t^2, t^3\}$ tem 4 elementos.
2. $\dim \mathscr{P}_n(\mathbb{R}) = n+1$, pois sua base canônica C tem exatamente $n+1$ elementos
$$C = \{1, t, t^2, \cdots, t^n\}.$$
3. $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, pois $C = \{(1,0),(0,1)\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^2$ e tem apenas 2 elementos.
4. $\dim \mathbb{R}^n = n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, pois sua base canônica tem n elementos $C = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$.
5. $\dim \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) = 4$, pois sua base canônica é
$$C = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$
6. $\dim \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) = m \cdot n$.
7. $\dim \mathbb{C} = 2$, pois a base canônica de $\mathbb{C}$, visto como um espaço vetorial real, é $C = \{1, i\}$.
8. $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$ (lê-se: "a dimensão complexa de $\mathbb{C}$ é igual a 1"). Pois, o espaço vetorial complexo $\mathbb{C}$ é gerado por apenas um elemento $\{1\}$.

▪

Proposição 4.1 Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Se W é subespaço de V então W tem dimensão finita e $\dim W \leq \dim V$.

Demonstração. Se W é o espaço nulo então tem dimensão finita, por convenção. Suponha $W \neq \{0\}$. Tome um vetor nao nulo $w_1 \in W$. Então o conjunto $B_1 = \{w_1\}$ é LI. Se B_1 gera W então W tem dimensão finita e $\dim W = 1$. Se B_1 não gera W então existe algum $w_2 \in W \setminus [w_1]$ tal que o conjunto $B_2 = \{w_1, w_2\}$ é LI. Se B_2 gera W então W tem dimensão finita e $\dim W = 2$. Se B_2 não gera W então existe algum $w_3 \in W \setminus [w_1, w_2]$ tal que o conjunto $B_3 = \{w_1, w_2, w_3\}$ é LI. Seguindo o mesmo raciocínio recursivamente e dado que a dimensão de V é finita, $\dim V = n$, e qualquer conjunto LI de V tem no máximo n vetores então existem um $m \in \mathbb{N}$, com $m \leq n$ tal que
$$B_m = \{w_1, \cdots, w_m\}$$
é uma base de W. Logo, W tem dimensão finita e $\dim W = m$, com $m \leq n$. ■

Proposição 4.2 Seja W subespaço vetorial de V e suponha $\dim W = \dim V$. Então $W = V$.

Demonstração. Tome $\dim W = \dim V = n$. Seja $\{w_1, \cdots, w_n\}$ base de W. Suponha, por absurdo, que $W \neq V$. Então existe um vetor $v \in V \setminus W$. Assim, o conjunto $\{w_1, \cdots, w_n, v\}$ é LI. Absurdo, pois $\dim V = n$ e, pelo Teorema 4.2, qualquer subconjunto de V com mais de n vetores é LD. Logo, $W = V$. ■

A proposição acima nos ajuda a encontrar, com mais eficiência, bases de uma espaço vetorial V de dimensão n. Note que um subconjunto finito LI com menos de n elementos não pode ser base de um espaço de dimensão n. Por outro lado, tal subconjunto será uma base de V se possuir exatamente n elementos, como podemos perceber no próximo resultado.

Corolário 4.2 Seja V um espaço de dimensão finita n. Qualquer subconjunto LI de V com exatamente n elementos é uma base de V.

Demonstração. Considere $S = \{v_1, \cdots, v_n\}$ um subconjunto LI de V. Obviamente, o espaço gerado por S está contido em V. Além disso, $\dim[S] = n = \dim V$. Portanto, pela Proposição 4.2, $[S] = V$. Logo, S é base de V. ■

Teorema 4.3 — Completamento. Seja V um espaço vetorial de dimensão n. Se $\{v_1, \cdots, v_k\}$ é um subconjunto LI de V, com $k < n$, então existem vetores $v_{k+1}, \cdots, v_n$ tais que o conjunto $\{v_1, \cdots, v_k, v_{k+1}, \cdots, v_n\}$ é uma base de V.

Demonstração. Seja W o subespaço de V gerado pelo conjunto $\{v_1, \cdots, v_k\}$. Note que este conjunto é uma base de W, por ser LI. Além disso, $W \neq V$, pois caso contrário $k = n$, o que contraria a hipótese de que $k < n$. Tome algum vetor $v_{k+1} \in V \setminus W$. Obviamente, os vetores $v_1, \cdots, v_k, v_{k+1}$ são LI. Se $n = k+1$ então os vetores $v_1, \cdots, v_k, v_{k+1}$ formam uma base de V. Se $k+1 < n$ então existem um vetor $v_{k+2} \in V \setminus (W + [v_{k+1}])$ tal que o conjunto $\{v_1, \cdots, v_{k+1}, v_{k+2}\}$ é LI. Repetimos os procedimento até completar a base de V. ■

▪ **Exemplo 4.4** Sejam os espaços vetoriais $U = [v_1, v_2, v_3, v_4]$ e $W = [v_5, v_6]$, onde $v_1 = (1,2,0,1)$, $v_2 = (1,0,4,3)$, $v_3 = (0,-1,2,1)$, $v_4 = (-1,-3,2,0)$, $v_5 = (0,1,0,1)$ e $v_6 = (-1,0,1,0)$.

(a) Encontre uma base para $U \cap W$ e uma base para $U + W$. Calcule a dimensão de cada um deles.

Verificamos se os vetores que geram U formam uma base. Basta verificar se são LI. Para isto, organizamos os vetores v_1, v_2, v_3, v_4 como linhas de uma matriz e usamos o método da eliminação de Gauss. Nesse processo, utilizamos a notação $L_i \to kL_j \pm L_i$ para indicar que a linha i é reescrita como k vezes a linha j mais (ou menos) a linha i.

Portanto,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 2 & 0 \end{bmatrix} (L_4 \to L_2 + L_4) \implies \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & 3 \end{bmatrix} (L_2 \to L_1 - L_2)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & 3 \end{bmatrix} (L_2 \to \frac{1}{2}L_2) \implies \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & 3 \end{bmatrix} (L_3 \to L_2 + L_3)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 3 \end{bmatrix} (L_4 \to 3L_2 + L_4) \implies \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, v_1, v_2, v_3, v_4 são LD, pois há linhas nulas na matriz resultante. Como a matriz resultante tem duas linhas nulas, segue que dois destes vetores são supérfluos. Assim, $\{v_1, v_3\}$ forma uma base para U (basta olhar as linhas que sobraram). Já os vetores v_5 e v_6 são, obviamente, LI. Logo, $\{v_5, v_6\}$ forma uma base para W. Encontremos uma base para $U \cap W$. Temos que se o conjunto $\{v_1, v_3, v_5, v_6\}$ é LI então $U \cap W$ é trivial. Para mostrar isso, usamos a eliminação de Gauss para a matriz formada pelos vetores v_1, v_3, v_5, v_6.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} (L_4 \to L_1 + L_4) \implies \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} (L_4 \to -2L_2 + L_4)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{bmatrix} (L_3 \to -L_2 + L_3) \implies \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{bmatrix} (L_3 \to \frac{1}{2}L_3)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{bmatrix} (L_4 \to -5L_3 + L_4) \implies \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Como não restam linhas nulas segue que os vetores v_1, v_3, v_5, v_6 são LI. Portanto, nenhum vetor de U pode ser gerado por vetores de W e vice-versa. Logo $U \cap W = \{0\}$, sua base é vazia e $\dim(U \cap W) = 0$. Além disso, $U + W$ é gerado pela união das bases de U e W. Então $\{v_1, v_3, v_5, v_6\}$ é uma base para $U + W$, pois são vetores LI, e daí $\dim(U + W) = 4$. Note que $U + W \subset \mathbb{R}^4$ e $\dim(U + W) = \dim \mathbb{R}^4 = 4$. Logo, $U + W = \mathbb{R}^4$.

(b) A soma $U + W$ é direta? Justifique.
Do item a), temos que $U \cap W = \{0\}$. Logo, a soma $U + W$ é direta.

(c) Complete a base de U para $\mathbb{R}^4$.
Tomando os vetores v_1 e v_3 e completando o conjunto formado para uma base de $\mathbb{R}^4$. Os primeiros candidatos ao completamento são os vetores da base canônica. Tome os vetores $e_3 = (0,0,1,0)$ e $e_4 = (0,0,0,1)$ então temos a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calculamos o seu determinante usando o desenvolvimento de Laplace:

$$\det A = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Isso mostra que o conjunto $\{v_1, v_3, e_3, e_4\}$ é LI e, portanto, é uma base para $\mathbb{R}^4$.

■

4.2.1 Dimensão da soma de subespaços vetoriais

Proposição 4.3 Sejam U e W subespaços vetoriais de um espaço V. Então

$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W).$$

Demonstração. Seja $B = \{v_1, \cdots, v_m\}$ uma base de $U \cap W$. Como $B \subset U$ então, pelo Teorema do Completamento, existem vetores $u_1, \cdots, u_p \in U \setminus [B]$ tais que o conjunto

$$\{v_1, \cdots, v_m, u_1, \cdots, u_p\}$$

é uma base de U. Do mesmo modo, existem vetores $w_1, \cdots, w_q \in W \setminus [B]$ tais que o conjunto $\{v_1, \cdots, v_m, w_1, \cdots, w_q\}$ é uma base de W. Temos, portanto, que $\dim U \cap W = m$, $\dim U = m+p$ e $\dim W = m+q$. Afirmamos que os vetores

$$v_1, \cdots, v_m, u_1, \cdots, u_p, w_1, \cdots, w_q$$

formam uma base para $U+W$. Seja $v \in U+W$ então existem $u \in U$ e $w \in W$ tais que $v = u+w$. Como,

$$u = \sum_{i=1}^{m} a_i v_i + \sum_{j=1}^{p} b_j u_j \quad \text{e} \quad w = \sum_{i=1}^{m} c_i v_i + \sum_{k=1}^{q} d_k w_k,$$

temos que

$$\begin{aligned} v = u+w &= \sum_{i=1}^{m} a_i v_i + \sum_{j=1}^{p} b_j u_j + \sum_{i=1}^{m} c_i v_i + \sum_{k=1}^{q} d_k w_k \\ &= \sum_{i=1}^{m} (a_i + c_i) v_i + \sum_{j=1}^{p} b_j u_j + \sum_{k=1}^{q} d_k w_k. \end{aligned}$$

Logo, $U+W=[v_1,\cdots,v_m,u_1,\cdots,u_p,w_1,\cdots,w_q]$. Temos também que o conjunto $v_1,\cdots,v_m,u_1,\cdots,u_p,w_1,\cdots,w_q$ é LI (faça como **exercício**). Logo,

$$\dim(U+W)=m+p+q=(m+p)+(m+q)-m=\dim U+\dim W-\dim(U\cap W).$$

■

▪ **Exemplo 4.5** Ilustre com um exemplo que se U e W são subespaços de um espaço vetorial V de dimensão finita, então:

$$\dim(U+W)=\dim U+\dim W-\dim(U\cap W).$$

Sejam $U=[(2,3)]$ e $W=[(4,6)]$. Ou seja, $U=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=\frac{3}{2}x\}=W$.
De fato, note que

$$\begin{aligned} U &= [(2,3)] \\ &= \{t(2,3) : t\in\mathbb{R}\} \\ &= \{(2t,3t) : t\in\mathbb{R}\} \\ &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=2t, y=3t\} \\ &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x/2=t, y=3t\} \\ &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=3x/2\}=W \end{aligned}$$

Assim, $U=W$, portanto, $U\cap W=U$, $U+W=U$. Note que, $\dim U=\dim W=\dim(U\cap W)=\dim(U+W)$. Logo,

$$\begin{aligned} \dim(U+W) &= 1 \\ \dim U+\dim W-\dim(U\cap W) &= 1+1-1=1. \end{aligned}$$

▪

4.3 Exercícios

1. Verifique se o conjunto $\{(1,0,1),(1,1,0),(0,1,1)\}$ é uma base para o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$.

2. Sejam $U=[v_1,v_2,v_3,v_4]$ e $W=[v_5,v_6]$ espaços vetoriais, onde $v_1=(1,1,1,1)$, $v_2=(1,-1,-1,3)$, $v_3=(3,1,1,5)$, $v_4=(2,1,1,3)$, $v_5=(0,1,0,1)$ e $v_6=(1,0,1,0)$.
   a. Encontre uma base para $U\cap W$ e uma base para $U+W$. Calcule a dimensão de cada um deles.
   b. A soma $U+W$ é direta? Justifique.

3. Seja V um espaço vetorial de dimensão 5. Um conjunto formado por 6 vetores em V pode ser linearmente independente?

4. Considere o subespaço vetorial W de $\mathbb{R}^4$ definido como o espaço gerado pelos vetores $v_1 = (1,0,0,0)$, $v_2 = (0,1,0,0)$, $v_3 = (1,1,0,0)$ e $v_4 = (1,1,1,0)$. Encontre uma base para W.

5. Seja $V = \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ o espaço vetorial real dos polinômios de grau menor ou igual a 3. Verifique que $\beta = \{1, 1+t, (1+t)^2, (1+t)^3\}$ é uma base de V.

6. Considere o espaço vetorial $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$, o espaço dos polinômios de grau no máximo 3 com coeficientes reais, e o subespaço W definido pelos polinômios $p(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$ tais que $p(1) = 0$. Encontre uma base para W.

7. O conjunto $B = \{1, x, x^2\}$ é uma base do $\mathbb{R}$-espaço vetorial $\mathscr{P}_2(\mathbb{C})$? Justifique.

8. Seja z um elemento qualquer de $\mathbb{C}$. Verifique se o conjunto $\{z, \bar{z}\}$ é uma base do $\mathbb{R}$-espaço vetorial $\mathbb{C}$.

9. Explique por que $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2 = 2$ enquanto que $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^2 = 4$.

10. Encontre uma base e dê a dimensão do
    a. $\mathbb{R}$-espaço vetorial $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$;
    b. $\mathbb{C}$-espaço vetorial $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$.

11. Determine uma base e ache a dimensão para cada um dos espaços vetoriais a seguir:
    a. $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - 2y = 0\}$;
    b. $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$;
    c. $V = \{(x,y,z,w,t) \in \mathbb{R}^5 : x + y - z = 0 \text{ e } w - t = 0\}$;
    d. $V = \{a + bt + ct^3 + dt^5 : a,b,c,d \in \mathbb{R}\}$;
    e. $V = \{A \in \mathbb{M}_2 : A^t = A\}$;
    f. $V = \{A \in \mathbb{M}_2 : A^t = -A\}$;
    g. $V = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_2 : x,y \in \mathbb{R} \right\}$;
    h. $V = \left\{ \begin{bmatrix} x+y+z & y+z & x-y \\ 2y-3z & x-y-z & -x+2z \\ y-4z & 2x-y+2z & x-y+z \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_3 : x,y \in \mathbb{R} \right\}$;
    i. $V = \{(z, w, z-w) : z,w \in \mathbb{C}\}$ subespaço vetorial do $\mathbb{R}$-espaço vetorial $\mathbb{C}^3$;
    j. $V = \{(z_1,z_2,z_3) \in \mathbb{C}^3 : z_1 + z_2 = 0 \text{ e } z_2 - z_3 = 0\}$ subespaço vetorial do $\mathbb{C}$-espaço vetorial $\mathbb{C}^3$.

12. Considere o espaço vetorial das matrizes quadradas de ordem 3 com entradas reais e o subespaço W definido pelas matrizes simétricas. Encontre a dimensão de W.

13. Seja V um espaço vetorial de dimensão 4 e sejam u e v vetores linearmente independentes em V. Qual é a dimensão do espaço gerado por u, v e um terceiro vetor w em V?

14. Qual é a dimensão do espaço gerado por todos os polinômios de grau menor ou igual a 2?

15. Considere o espaço vetorial das matrizes reais de ordem 3. Existe uma base canônica para esse espaço? Qual é a dimensão desse espaço vetorial?

16. Seja V um espaço vetorial de dimensão 4 e sejam u e v vetores linearmente independentes em V. Qual é a dimensão do espaço gerado por $u+v$ e $u-v$ em V?

17. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ e os subespaços

$$U = [(1,0,0,1),(1,1,0,0),(2,1,0,1),(0,1,0,-1)]$$

e

$$V = [(1,1,1,0),(2,2,2,1),(0,0,0,2),(1,1,1,1)].$$

Determine uma base para $\mathbb{R}^4$ que contenha a união das bases de U e V.

18. Uma matriz $A = (a_{ij})_{n\times n}$ é chamada de *centrossimétrica* se $a_{ij} = a_{n+1-i,n+1-j}$.
    a. Mostre que o conjunto da matrizes centrossimétricas de ordem 3,

$$\nabla_3 = \{A = (a_{ij})_{3\times 3} : a_{ij} = a_{4-i,4-j}\},$$

    é um espaço vetorial.
    b. Calcule uma base e dê a dimensão de ∇_3.

19. Calcule a base e a dimensão do $\mathbb{R}$-subespaço vetorial $W = \{(z_1,z_2,z_3) \in \mathbb{C}^3 : z_3 \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{C}^3$.

20. Convença-se de que o espaço vetorial formado por todos os polinômios em uma indeterminada t tem dimensão infinita.

5. Mudança de base

5.1 Coordenadas de um vetor

Dois conjuntos são iguais independente da ordem de seus elementos. Por exemplo, os conjuntos $A = \{u, v, w\}$ e $B = \{w, u, v\}$ são iguais. Porém, no caso de bases de espaços vetoriais, embora a igualdade entre conjunto continua válida, o mesmo não acontece quando consideramos os conjuntos como *bases ordenadas* de $V(\mathbb{K})$.

Definição 5.1 Uma base B de um espaço vetorial $V(\mathbb{K})$ é dita *base ordenada* se a ordem dos vetores em B é fixada.

Neste sentido, como bases ordenadas, as bases $\{v_1, v_2\}$ e $\{v_2, v_1\}$ de um espaço vetorial $V(\mathbb{K})$ de dimensão 2 não são a mesma base. Isto é, não representam o mesmo sistema de coordenadas.

Proposição 5.1 Seja $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ uma base ordenada de um espaço vetorial $V(\mathbb{K})$. Então cada vetor de V é escrito de maneira única como combinação linear dos elementos da base B.

Demonstração. Seja $v \in V$ um vetor qualquer. Suponha que existem $a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$\begin{aligned} v &= a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n; \\ v &= b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n. \end{aligned}$$

Então,

$$a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n \implies (a_1 - b_1)v_1 + \cdots + (a_n - b_n)v_n = 0.$$

Como B é base, em particular LI, segue que $a_i - b_i = 0$, $i \in \{1, \cdots, n\}$. Logo, $a_i = b_i$, com $i \in \{1, \cdots, n\}$. ■

Definição 5.2 Sejam $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ uma base ordenada do espaço vetorial V e $v \in V$ um vetor qualquer, onde

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n.$$

As coordenadas de v em relação à base B é definida como uma matriz coluna, onde as entradas da matriz são os coeficientes a_i, ou seja,

$$[v]_B = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

▪ **Exemplo 5.1** Seja $v = (1,2)$ e considere a base canônica B de $\mathbb{R}^2$. Encontremos as coordenadas de v em relação à base canônica. Temos

$$(1,2) = 1(1,0) + 2(0,1).$$

Representamos os coeficientes desta combinação linear na forma de uma matriz:

$$[v]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(lê-se: as coordenadas de um vetor v em relação à base B.)

Se mudamos a ordem dos elementos do conjunto B, teremos uma nova base $B_1 = \{(0,1),(1,0)\}$. Daí, escrevemos o vetor v, considerando a ordem dos elementos nesta nova base: $(1,2) = 2(0,1) + 1(1,0)$. Logo, as coordenadas do vetor v em relação a base B_1 é dada por

$$[v]_{B_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

▪

▪ **Exemplo 5.2** Considere a nova base $B_2 = \{(1,1),(1,2)\}$. Note que os vetores $(1,1),(1,2)$ são LI, pois

$$a(1,1) + b(1,2) = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ a + 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = b = 0.$$

Temos também que esses vetores geram qualquer elemente de $\mathbb{R}^2$. Seja (x,y) um vetor qualquer, temos

$$(x,y) = a(1,1) + b(1,2) \Rightarrow \begin{cases} a + b = x \\ a + 2b = y \end{cases} \Rightarrow a = 2x - y, b = y - x.$$

Logo, as coordenadas de um vetor (x,y) em relação a base B_2 são dadas por

$$[(x,y)]_{B_2} = \begin{bmatrix} 2x - y \\ y - x \end{bmatrix}.$$

Ou seja,

$$[(1,2)]_{B_2} = \begin{bmatrix} 2\cdot 1-2 \\ 2-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

■

■ **Exemplo 5.3** Verifique se o conjunto B abaixo é uma base ordenada de $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$

$$B = \{1, 1+t, 1-t^2, 1-t-t^2-t^3\}.$$

Vejamos se o conjunto B é LI:

$$\begin{aligned} a\cdot 1 + b\cdot(1+t) + c\cdot(1-t^2) + d\cdot(1-t-t^2-t^3) &= 0 \\ a+b+bt+c-ct^2+d-dt-dt^2-dt^3 &= 0 \\ (a+b+c+d)+bt-dt-ct^2-dt^2-dt^3 &= 0 \\ (a+b+c+d)+(b-d)t+(-c-d)t^2-dt^3 &= 0 \end{aligned}$$

Portanto, temos

$$\begin{cases} a+b+c+d=0 \\ b-d=0 \\ -c-d=0 \\ d=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \\ d=0 \end{cases}.$$

Como cada um dos coeficientes é nulo, isto mostra que o conjunto B é LI. Basta provar que B gera qualquer polinômio de $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$. De fato, por um cálculo similar, obtemos

$$\begin{aligned} a\cdot 1 + b\cdot(1+t) + c\cdot(1-t^2) + d\cdot(1-t-t^2-t^3) &= \alpha+\beta t+\gamma t^2+\delta t^3 \\ (a+b+c+d)+(b-d)t+(-c-d)t^2-dt^3 &= \alpha+\beta t+\gamma t^2+\delta t^3 \end{aligned}$$

De onde, obtemos o sistema

$$\begin{cases} a+b+c+d=\alpha \\ b-d=\beta \\ -c-d=\gamma \\ -d=\delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\alpha-b-c-d \\ b=\beta-\delta \\ c=-\gamma+\delta \\ d=-\delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\alpha-\beta+\delta+\gamma \\ b=\beta-\delta \\ c=-\gamma+\delta \\ d=-\delta \end{cases}.$$

Como o sistema tem solução única, segue que o conjunto B gera todo o espaço $\mathscr{P}_3$. Logo, B é uma base de $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$. Note que $\dim(\mathscr{P}_3(\mathbb{R})) = 4$.

Calculamos agora as coordenadas do vetor $p(t) = 1+2t+3t^2+4t^3$ em relação à base B. Daí, temos que $\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 3$ e $\delta = 4$. Substituindo estes valores no sistema acima,

temos que $a = 6, b = -2, c = 1$ e $d = -4$. Logo, as coordenadas do vetor $p(t)$ em relação à base B é dada por

$$[p(t)]_B = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Sendo $C = \{1, t, t^2, t^3\}$ a base canônica, as coordenadas de $p(t)$ são

$$[p(t)]_C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Sendo $D = \{1, t^2, t^3, t\}$ uma base ordenada de $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ (esta não é a base canônica), as coordenadas de $p(t)$ são

$$[p(t)]_D = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

■

■ **Exemplo 5.4** Considere as seguintes bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$: $B = \{(1,1), (-1,1)\}$, $C = \{(1,0), (0,1)\}$ e $D = \{(-1,1), (1,1)\}$. Calculamos as coordenadas de $v = (1,0)$ em relação a cada uma das bases.

- $[v]_B$

  $$(1,0) = x(1,1) + y(-1,1) = (x-y, x+y) \implies \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 0 \end{cases} \implies x = -y = \frac{1}{2}.$$

  Assim, $[v]_B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

- $[v]_C$

  $$(1,0) = x(1,0) + y(0,1) = (x,y) \implies x = 1, y = 0.$$

  Portanto, $[v]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

- $[v]_D$

  $$(1,0) = x(-1,1) + y(1,1) = (-x+y, x+y) \implies \begin{cases} -x + y = 1 \\ x + y = 0 \end{cases} \implies x = -y = -\frac{1}{2}.$$

  Assim, $[v]_D = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

■

5.2 Matriz mudança de base

O que vamos mostrar agora é que dadas duas bases distintas de um espaço vetorial, é possível encontrar uma matriz, chamada *matriz mudança de base*, de tal forma que pode-se encontrar as coordenadas de um vetor em relação a qualquer uma das bases.

Sejam $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ e $C = \{w_1, \cdots, w_n\}$ bases de um espaço vetorial de dimensão finita V. Um vetor $v \in V$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores da base B e da base C:

$$\begin{aligned} v &= a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n, \quad \text{cujas coordenadas de } v \text{ são} \quad [v]_B = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \\ v &= b_1w_1 + b_2w_2 + \cdots + b_nw_n, \quad \text{cujas coordenadas de } v \text{ são} \quad [v]_C = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Por outro lado, como $w_i \in V$ então escrevemos esses vetores como combinação linear dos vetores da base B:

$$\begin{aligned} w_1 &= a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \cdots + a_{n1}v_n = \sum_{i=1}^{n} a_{i1}v_i \\ w_2 &= a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{n2}v_n = \sum_{i=1}^{n} a_{i2}v_i \\ &\vdots \\ w_n &= a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \cdots + a_{nn}v_n = \sum_{i=1}^{n} a_{in}v_i \end{aligned}$$

Agora, substituimos w_i na combinação linear $v = b_1w_1 + b_2w_2 + \cdots + b_nw_n$, temos

$$\begin{aligned} v &= b_1w_1 + b_2w_2 + \cdots + b_nw_n \implies \\ v &= b_1\sum_{i=1}^{n} a_{i1}v_i + b_2\sum_{i=1}^{n} a_{i2}v_i + \cdots + b_n\sum_{i=1}^{n} a_{in}v_i \implies \\ v &= \left(\sum_{i=1}^{n} b_ia_{1i}\right)v_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} b_ia_{2i}\right)v_2 + \cdots + \left(\sum_{i=1}^{n} b_ia_{ni}\right)v_n \implies \\ a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n &= \left(\sum_{i=1}^{n} b_ia_{1i}\right)v_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} b_ia_{2i}\right)v_2 + \cdots + \left(\sum_{i=1}^{n} b_ia_{ni}\right)v_n. \end{aligned}$$

Comparando os coeficientes de cada vetor v_i, temos o sistema:

$$\begin{cases} a_1 = a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \cdots + a_{1n}b_n \\ a_2 = a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + \cdots + a_{2n}b_n \\ \vdots \\ a_n = a_{n1}b_1 + a_{n2}b_2 + \cdots + a_{nn}b_n \end{cases}.$$

Em notação matricial, o sistema acima pode ser escrito como

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \tag{5.1}$$

ou ainda como

$$[v]_B = [I]_B^C [v]_C,$$

onde a matriz $[I]_B^C$ muda as coordenadas de v na base C para as coordenadas de v na base B. Por isso, lê-se a notação $[I]_B^C$ como *a matriz mudança da base C para a base B* ou simplesmente matriz mudança de base. Outra notação usada para a matriz mudança da base C para a base B é M_B^C.

▪ **Exemplo 5.5** Dada as bases $B = \{(1,1),(1,-1)\}$ e $C = \{(0,1),(2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$. Vamos encontrar $[I]_B^C$ e $[I]_C^B$.

Como desejamos encontrar $[I]_B^C$, devemos **escrever os elementos da base C como combinação linear dos elementos da base B**:

$$\begin{aligned} (0,1) &= x(1,1) + y(1,-1) \Rightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x-y=1 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2}, \\ (2,1) &= x(1,1) + y(1,-1) \Rightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ x-y=1 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{3}{2}, y = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Logo, a matriz mudança de base, da base C para a base B, é

$$[I]_B^C = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Vamos contruir agora a matriz mudança de base, da base B para a base C, $[I]_C^B$:

$$\begin{aligned} (1,1) &= x(0,1) + y(2,1) \Rightarrow \begin{cases} 2y=1 \\ x+y=1 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}, \\ (1,-1) &= x(0,1) + y(2,1) \Rightarrow \begin{cases} 2y=1 \\ x+y=-1 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{3}{2}, y = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Logo, a matriz mudança de base, da base B para a base C, é

$$[I]_C^B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Note que:

$$[I]_B^C \cdot [I]_C^B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Isto é

$$[I]_B^C \cdot [I]_C^B = I_2 \Rightarrow [I]_B^C = ([I]_C^B)^{-1}.$$

■

Proposição 5.2 Dada uma base B de um espaço vetorial V, de dimensão n, tem-se que

$$[I]_B^B = I_n,$$

onde I_n é a matriz identidade de ordem n.

Demonstração. Seja $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ uma base qualquer de V. Note que,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i &= v_j \\ a_{1j}v_1 + a_{2j}v_2 + \cdots + a_{jj}v_j + \cdots + a_{nj}v_n &= v_j \\ a_{1j}v_1 + a_{2j}v_2 + \cdots + (a_{jj} - 1)v_j + \cdots + a_{nj}v_n &= 0, \end{aligned}$$

para $j \in \{1, \cdots, n\}$. Como os vetores $v_1, \cdots, v_n$ são LI, entao

$$a_{1j} = a_{2j} = \cdots = a_{jj} - 1 = \cdots = a_{nj} = 0,$$

para cada $j \in \{1, \cdots, n\}$. Isto é,

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } i = j \\ 0, \text{ se } i \neq j \end{cases}.$$

Logo, $[I]_B^B = I_n$. ■

Proposição 5.3 Sejam B, C e D bases de um espaço vetorial V. Então

$$[I]_B^C [I]_C^D = [I]_B^D.$$

Demonstração. Sejam $B = \{u_1, \cdots, u_n\}, C = \{v_1, \cdots, v_n\}$ e $D = \{w_1, \cdots, w_n\}$ as bases de V. Considere também $[I]_B^C = (a_{ij})_{n\times n}$, $[I]_C^D = (b_{ij})_{n\times n}$ e $[I]_B^D = (c_{ij})_{n\times n}$, as respectivas matrizes mudança de base. Então,

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} u_i, \quad w_k = \sum_{j=1}^{n} b_{jk} v_j, \quad w_k = \sum_{i=1}^{n} c_{ik} u_i.$$

Portanto,

$$w_k = \sum_{j=1}^{n} b_{jk} v_j = \sum_{j=1}^{n} b_{jk} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} u_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \right) u_i.$$

Como os vetores u_i, com $i \in \{1, \cdots, n\}$, são LI e dado que $w_k = \sum_{i=1}^{n} c_{ik} u_i$, então

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}.$$

■

Proposição 5.4 Sejam B e C bases de um espaço vetorial V. Então a matriz $[I]_B^C$ possui inversa e

$$([I]_B^C)^{-1} = [I]_C^B.$$

Demonstração. Pela proposição anterior temos que

$$[I]_B^C [I]_C^B = [I]_B^B \quad \text{e} \quad [I]_C^B [I]_B^C = [I]_C^C.$$

O resultado segue da Proposição 5.2. ■

▪ **Exemplo 5.6** Considere as bases $B = \{1, 1+t, t+t^2\}$ e $C = \{2, 1-t, 1-t^2\}$ de $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$. Achemos $[I]_B^C$. Para isso, tomamos os elementos de C e escrevemos como combinação linear dos elementos de B:

$$\begin{aligned}
2 &= x \cdot 1 + y \cdot (1+t) + z \cdot (t+t^2) \Rightarrow \\
2 &= x + y + yt + zt + zt^2 \\
2 &= x + y + (y+z)t + zt^2 \\
&\Rightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ y + z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \\
&\Rightarrow x = 2, y = z = 0.
\end{aligned}$$

Para o segundo vetor da base C, temos

$$\begin{aligned}
1 - t &= x \cdot 1 + y \cdot (1+t) + z \cdot (t+t^2) \\
&= x + y + yt + zt + zt^2 \\
1 - t + 0t^2 &= x + y + (y+z)t + zt^2 \\
&\Rightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = -1 \\ z = 0 \end{cases} \\
&\Rightarrow x = 2, y = -1, z = 0.
\end{aligned}$$

Para o terceiro vetor da base C, temos

$$\begin{aligned} 1-t^2 &= x\cdot 1+y\cdot(1+t)+z\cdot(t+t^2) \\ 1+0t-t^2 &= x+y+(y+z)t+zt^2 \\ &\Rightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ y+z=0 \\ z=-1 \end{cases} \\ &\Rightarrow x=0, y=1, z=-1. \end{aligned}$$

Portanto, a matriz mudança de base, da base B para a base C, é

$$[I]_B^C = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Exercício: Calcule a matriz mudança de base $[I]_C^B$. ■

■ **Exemplo 5.7** Tome $V=\mathbb{R}^3$ e sejam $B=\{(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0)\}$ e C a base canônica. Encontramos $[I]_B^C$. Escrevemos os vetores da base canônica como combinação linear dos vetores da base B:

$$(1,0,0) = x(0,1,1)+y(1,0,1)+z(1,1,0) \Rightarrow \begin{cases} y+z=1 \\ x+z=0 \\ x+y=0 \end{cases} \Rightarrow x=-\frac{1}{2}, y=z=\frac{1}{2}$$

$$(0,1,0) = x(0,1,1)+y(1,0,1)+z(1,1,0) \Rightarrow \begin{cases} y+z=0 \\ x+z=1 \\ x+y=0 \end{cases} \Rightarrow x=z=\frac{1}{2}, y=-\frac{1}{2}$$

$$(0,0,1) = x(0,1,1)+y(1,0,1)+z(1,1,0) \Rightarrow \begin{cases} y+z=0 \\ x+z=0 \\ x+y=1 \end{cases} \Rightarrow x=y=\frac{1}{2}, z=-\frac{1}{2}$$

Portanto, a matriz mudança de base procurada é:

$$[I]_B^C = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Seja o vetor $v=(1,2,3)$, temos que as coordenadas de v em relação à base canônica é dada por $[v]_C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Encontremos as coordenadas do vetor v em relação à base B.

$$[v]_B = [I]_B^C[v]_C = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

De fato, fazendo a combinação linear usando as coordenadas de v em relação à base B, temos

$$2(0,1,1)+1(1,0,1)+0(1,1,0)=(0,2,2)+(1,0,1)=(1,2,3)=v.$$

■

■ **Exemplo 5.8** Considere as bases $B=\{e_1,e_2,e_3\}$ e $C=\{g_1,g_2,g_3\}$ de um espaço vetorial V relacionadas da seguinte forma:

$$\begin{cases} g_1 = e_1+e_2-e_3 \\ g_2 = 2e_2+3e_3 \\ g_3 = 3e_1+e_3 \end{cases}.$$

1. Determine M_B^C e M_C^B (lembre que esta matriz é a mesma matriz mudança da base de B para C, com outra notação).

   Calculamos M_B^C. O sistema que representa esta mudança é o dado no enunciado da questão. Logo, a matriz mudança de base é:

   $$M_B^C=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Como $M_C^B=\left(M_B^C\right)^{-1}$ então basta calcular a inversa da matriz M_B^C, por meio da seguinte matriz ampliada:

   $$\left[\begin{array}{c|c} M_B^C & I_3 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

   Lembre que basta reduzir a matriz M_B^C à forma escada, na matriz ampliada. Consequentemente, todas as operações entre linhas feitas na matriz M_B^C devem também ser feitas na matriz identidade, à direita na matriz ampliada. Assim, a matriz resultante será a matriz inversa procurada.

   Indicamos por L_i a linha i da matriz ampliada e o símbolo $\to$ para indicar a substituição que faremos de uma passo para outro. Assim, $L_i \to L_j+L_i$ sinaliza a troca da linha i pela soma da linha i com a linha j. Prosseguindo desta forma, em relação à matriz ampliada acima, começamos fazendo as seguintes operações:

   $$L_2 \to L_1-L_2 \text{ e } L_3 \to L_1+L_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad L_2 \to L_3 + L_2 \implies$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad L_3 \to 3L_2 - L_3 \implies$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 17 & 5 & -3 & 2 \end{array}\right] \qquad L_3 \to \frac{1}{17}L_3 \implies$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{17} & -\frac{3}{17} & \frac{2}{17} \end{array}\right] \qquad L_1 \to -3L_3 + L_1; \quad L_2 \to -7L_3 + L_2 \implies$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{17} & \frac{9}{17} & -\frac{6}{17} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{17} & \frac{4}{17} & \frac{3}{17} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{17} & -\frac{3}{17} & \frac{2}{17} \end{array}\right] .$$

Portanto,

$$M_C^B = \begin{bmatrix} \frac{2}{17} & \frac{9}{17} & -\frac{6}{17} \\ -\frac{1}{17} & \frac{4}{17} & \frac{3}{17} \\ \frac{5}{17} & -\frac{3}{17} & \frac{2}{17} \end{bmatrix}.$$

2. Se $[v]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, encontre $[v]_C$.

Sabemos que $[v]_C = M_C^B [v]_B$ então

$$[v]_C = \begin{bmatrix} \frac{2}{17} & \frac{9}{17} & -\frac{6}{17} \\ -\frac{1}{17} & \frac{4}{17} & \frac{3}{17} \\ \frac{5}{17} & -\frac{3}{17} & \frac{2}{17} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. Se $[u]_C = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$, encontre $[u]_B$.

Sabemos que $[u]_B = M_B^C [u]_C$ então

$$[u]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

■

■ **Exemplo 5.9** Considere o seguinte subespaço de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$:

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) : x - y - z = 0 \right\}.$$

1. Mostre que

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

e

$$C = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

são bases de W.
Para o conjunto B, temos que provar a independência linear.

$$a \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

o que implica no sistema

$$\begin{cases} a+b=0 \\ a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases}.$$

Logo, o conjunto B é LI. Agora temos que mostrar que o conjunto B gera W. Perceba que qualquer elemento de W, pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x & y \\ x-y & t \end{bmatrix} &= a \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a+b & a \\ b & c \end{bmatrix} \\ &= \begin{cases} a+b=x \\ a=y \\ b=x-y \\ c=t \end{cases}. \end{aligned}$$

Portanto, o sistema é possível e determinando. Logo, B gera W, i.e., B é base de W.
Resolve-se de maneira análoga para o conjunto C.

2. Encontre M_B^C e M_C^B.
Façamos M_B^C. Para isto, escrevemos os vetores da base C como combinação linear dos

vetores da base B.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ c = 0 \end{cases},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \\ c = 0 \end{cases},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 1 \end{cases}.$$

Daí,

$$M_B^C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Façamos M_C^B. Para isto, escrevemos os vetores da base B como combinação linear dos vetores da base C.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 0 \end{cases},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 1 \end{cases}.$$

Daí, tome os coeficientes de cada equação acima e monte cada coluna da matriz mudança de base:

$$M_C^B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Encontre uma base D de W tal que a matriz

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

seja a matriz mudança de base da base D para a base B, isto é, $P = M_D^B$.

Sabemos que a dimensão de W é igual a 3. Daí a base D tem exatamente 3 elementos, i.e., $D = \{X, Y, Z\}$. Para construir a matriz M_D^B, devemos tomar os elementos de B e escrever como combinação linear dos elementos da base D:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} &= aX + bY + cZ, \\
\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} &= dX + eY + fZ, \\
\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} &= gX + hY + iZ,
\end{aligned}$$

ou seja, a matriz mudança de base é

$$M_D^B = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{cases}
\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = X + 0Y + 0Z \\
\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = X + 0Y + 3Z \\
\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0X + 2Y + Z
\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}
\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = X \\
\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = X + 3Z \\
\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2Y + Z
\end{cases}.$$

Da segunda equação matricial, temos

$$\begin{aligned}
3Z &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - X \Rightarrow \\
3Z &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \\
3Z &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \\
Z &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Da terceira equação matricial, temos

$$2Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - Z \Rightarrow 2Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow Y = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$D = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

é a base procurada.

■

■ **Exemplo 5.10** Considere as bases $B = \{1, 1+t, 1+t^2\}$ e $C = \{1, t, t^2\}$ do espaço vetorial $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$:

1. Determine M_B^C e M_C^B.
   Façamos M_B^C. Para isto, escrevemos os vetores da base C como combinação linear dos vetores da base B.

$$\begin{cases} 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot (1+t) + 0 \cdot (1+t^2) \\ t = a \cdot 1 + b \cdot (1+t) + c \cdot (1+t^2) = -1 \cdot 1 + 1 \cdot (1+t) + 0 \cdot (1+t^2) \\ t^2 = d \cdot 1 + e \cdot (1+t) + f \cdot (1+t^2) = -1 \cdot 1 + 0 \cdot (1+t) + 1 \cdot (1+t^2) \end{cases}.$$

   Daí,

$$M_B^C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Façamos M_C^B. Para isto, escrevemos os vetores da base B como combinação linear dos vetores da base C.

$$\begin{cases} 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 \\ 1+t = 1 \cdot 1 + 1 \cdot t + 0 \cdot t^2 \\ 1+t^2 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot t + 1 \cdot t^2 \end{cases}.$$

   Daí, tome os coeficientes de cada equação acima e monte cada coluna da matriz mudança de base:

$$M_C^B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Se $[v]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix}$, encontre $[v]_C$. Sabemos que $[v]_C = M_C^B [v]_B$ então

$$[v]_C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

3. Se $[v]_C = \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}$, encontre $[v]_B$. Sabemos que $[v]_B = M_B^C [v]_C$ então

$$[v]_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

4. Se $D = \{1, t, t^2\}$ é a base canônica de $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$, encontre M_B^D e M_D^C.
   Como D é a base canônica e C também o é, então $M_B^D = M_B^C$ e também $M_D^C = M_C^C = I_3$.
   De fato, considere a base canônica C, então

$$\begin{cases} 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 \\ t = 0 \cdot 1 + 1 \cdot t + 0 \cdot t^2 \\ t^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + 1 \cdot t^2 \end{cases}.$$

   Logo,

$$M_C^C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   ∎

5.3 Exercícios

1. Calcule as coordenadas do vetor $v = (1,2)$ em relação às seguintes bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$:

   a. $B_1 = \{(1,0),(0,1)\}$;
   b. $B_2 = \{(1,0),(1,1)\}$;
   c. $B_3 = \{(1,2),(2,1)\}$;
   d. $B_4 = \{(1,1),(1,-1)\}$.

2. Seja $B = \{(1,2,3),(2,3,1),(3,1,2)\}$ uma base do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$. Encontre as coordenadas do vetor $v = (4,-2,5)$ em relação à base B.

3. Considere a base $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ do espaço vetorial $\mathbb{R}^4$, onde $v_1 = (1,0,1,0)$, $v_2 = (0,1,0,1)$, $v_3 = (1,1,0,0)$ e $v_4 = (1,0,1,1)$. Seja o vetor $v = (2,3,1,4)$. Encontre suas coordenadas em relação aos vetores da base B.

4. Considere o espaço vetorial $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ das matrizes de ordem 2 com entradas reais.
   a. Ache as coordenadas da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

   em relação à base

$$C = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

   b. O que se observa quando comparamos $[A]_C$ com $[v]_B$, do Exercício 3? Por que você acha que isso acontece?

5. Considere $B = \{(1,0,0),(1,-1,0),(1,-2,1)\}$ uma base do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$. Calcule $[(1,1,1)]_B$.

6. Seja $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ o espaço vetorial de todos os polinômios com coeficientes reais de grau menor ou igual a 2.
   a. Encontre as coordenadas do polinômio $p(t) = 1+t+t^2$ em relação à base $C = \{1, 1-t, (1-t)^2\}$.
   b. O que se observa quando comparamos $[p(t)]_C$ com $[(1,1,1)]_B$, do Exercício 5? Por que você acha que isso acontece?

7. Seja o $\mathbb{C}$-espaço vetorial $\mathscr{P}_2(\mathbb{C})$ de polinômios de grau menor ou igual a 2 com coeficientes complexos. Seja $p(x) = 2x^2 + (3+2i)x - 1$ um polinômio em $\mathscr{P}_2(\mathbb{C})$. Encontre as coordenadas de $p(x)$ em relação à base $B = \{1, x, x^2\}$.

8. Considere o $\mathbb{C}$-espaço vetorial $\mathbb{M}_3(\mathbb{C})$ das matrizes de ordem 3 com entradas complexas. Seja $B = \{E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{21}, E_{22}, E_{23}, E_{31}, E_{32}, E_{33}\}$ a base canônica de $\mathbb{M}_3(\mathbb{C})$, onde E_{ij} é a matriz com entrada ij igual a 1 e todas as outras entradas iguais a zero. Dado o vetor
$$A = \begin{bmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -1 & i \\ 0 & i & 1 \end{bmatrix},$$
encontre suas coordenadas em relação à base B.

9. Considere as bases ordenadas $B = \{(0,1), (1,0)\}$ e $C = \{(1,0), (0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$. Determine M_B^C e M_C^B.

10. Considere a base $B = \{(1,2), (1,1)\}$ do espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ e a matriz de mudança de base
$$M_B^C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$
para alguma base C, encontre as coordenadas do vetor $v = (2,1)$ em relação à base C.

11. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$. Determine a matriz de mudança de base M_C^B, onde $B = \{(1,2,1), (0,1,1), (1,1,0)\}$ e $C = \{(2,3,1), (-1,0,1), (1,1,1)\}$.

12. Dadas as bases $B = \{1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3\}$ e $C = \{1, 1+t, (1+t)^2, (1+t)^3\}$ do espaço vetorial $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$.
   a. Encontre as coordenadas do vetor $p(t) = -t+t^2-t^3$ em relação a cada uma das bases B eC.
   b. Determine M_C^B e M_B^C.

13. Sejam B e C bases de um espaço vetorial V, cuja matriz mudança de base é
$$M_B^C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$
Seja v um vetor de V:

a. Determine $[v]_B$, sabendo que $[v]_C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

b. Determine $[v]_C$, sabendo que $[v]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

14. Seja $V(\mathbb{R})$ o espaço vetorial das matrizes de ordem 3 triangulares inferiores. Considere as bases

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

e

$$C = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

a. Ache as coordenadas da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ em relação a cada uma das bases B e C.

b. Determine as matrizes mudança de base M_C^B e M_B^C.

15. Considere o subconjunto $B = \{1, 1-t, (1+t)^2, (1-t)^3\}$ de $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$:

a. Verifique que B é uma base de $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$.

b. Determine M_B^C, onde C é a base canônica de $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$.

c. Seja $p(t) = (1+t)^3$. Calcule $[p(t)]_B$.

d. Encontre uma base D de $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ tal que a matriz mudança de base de B para D é dada por:

$$M_D^B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

e. Calcule $[p(t)]_D$.

f. Calcule M_B^D.

16. Considere o $\mathbb{R}$-espaço vetorial $\mathbb{C}^2$.

a. Mostre que $B = \{(1,0), (1,1), (i, 1-i), (1+i, i)\}$ é uma base de $\mathbb{C}^2$.

b. Seja $v = (2+i, 3i)$, encontre $[v]_B$.

c. Se C é a base canônica de $\mathbb{C}^2$, determine M_C^B e M_B^C.

d. Calcule $[v]_C$.

6. Transformações lineares

Definição 6.1 Sejam U e V espaços vetoriais. Diz-se que uma função $T : U \to V$ é uma transformação linear se

$$T(u+\lambda w) = T(u) + \lambda T(w),$$

onde $u, w \in U$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Note que T é uma transformação linear se

1. for linear para a soma:

$$T(u+w) = T(u) + T(w).$$

2. for linear para o produto por escalar:

$$T(\lambda w) = \lambda T(w).$$

Quando $U = V$ a transformação linear $T : V \to V$ também é chamada de *operador linear*.

■ **Exemplo 6.1** $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $T(x,y) = x+y$. Sejam $u = (x,y), v = (z,w) \in \mathbb{R}^2$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} T(u+\lambda v) &= T((x,y) + \lambda(z,w)) \\ &= T(x+\lambda z, y+\lambda w) \\ &= (x+\lambda z) + (y+\lambda w) \\ &= (x+y) + \lambda(z+w) \\ &= T(x,y) + \lambda T(z,w) \\ &= T(u) + \lambda T(v). \end{aligned}$$

Assim, T é uma transformação linear. ■

▪ **Exemplo 6.2** $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, definida por $T(x,y)=xy$, não é uma transformação linear. Sejam $u=(x,y)$ e $\lambda\in\mathbb{R}$, então

$$T(\lambda u)=T(\lambda x,\lambda y)=(\lambda x)(\lambda y)=\lambda^2 xy=\lambda^2 T(x,y)=\lambda^2 T(u)\neq\lambda T(u).$$

▪

Se $T:U\to V$ é uma transformação linear então $T(0)=0$, (lê-se: a imagem do vetor nulo de U é o vetor nulo de V.) Uma notação para isto pode ser: $T(0_U)=0_V$. De fato, note que

$$T(0_U)=T(0_U+0_U)=T(0_U)+T(0_U).$$

Agora, somamos a ambos os lados da equação acima o termo $-T(0_U)$, temos

$$T(0_U)-T(0_U)=T(0_U)+T(0_U)-T(0_U)\Rightarrow T(0_U)=0_V.$$

A recíproca da afirmação acima não é verdadeira, ou seja, se $T(0)=0$ não temos, necessariamente, que T é uma transfomação linear. No Exemplo 6.2, temos que $T(0,0)=0$, mas T não é uma transformação linear.

▪ **Exemplo 6.3** Tome a função $T:\mathbb{M}_2(\mathbb{R})\to\mathbb{R}^4$, definida por,

$$T\left(\begin{bmatrix}x & y\\ z & w\end{bmatrix}\right)=(x,y,z,w).$$

Mostremos que T é uma transformação linear. Sejam $A=\begin{bmatrix}x_1 & y_1\\ z_1 & w_1\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}x_2 & y_2\\ z_2 & w_2\end{bmatrix}$, $\lambda\in\mathbb{R}$. Daí,

$$\begin{aligned}
T(A+\lambda B) &= T\left(\begin{bmatrix}x_1 & y_1\\ z_1 & w_1\end{bmatrix}+\lambda\begin{bmatrix}x_2 & y_2\\ z_2 & w_2\end{bmatrix}\right)\\
&= T\left(\begin{bmatrix}x_1+\lambda x_2 & y_1+\lambda y_2\\ z_1+\lambda z_2 & w_1+\lambda w_2\end{bmatrix}\right)\\
&= (x_1+\lambda x_2,y_1+\lambda y_2,z_1+\lambda z_2,w_1+\lambda w_2)\\
&= (x_1,y_1,z_1,w_1)+(\lambda x_2,\lambda y_2,\lambda z_2,\lambda w_2)\\
&= (x_1,y_1,z_1,w_1)+\lambda(x_2,y_2,z_2,w_2)\\
&= T\left(\begin{bmatrix}x_1 & y_1\\ z_1 & w_1\end{bmatrix}\right)+\lambda T\left(\begin{bmatrix}x_2 & y_2\\ z_2 & w_2\end{bmatrix}\right)\\
&= T(A)+\lambda T(B).
\end{aligned}$$

Assim, T é uma transformação linear. ▪

Definição 6.2 Uma função $f:D\to E$ é *injetiva* se $f(x)=f(y)\Rightarrow x=y$.

Temos que T, do Exemplo 6.3, é uma função injetiva. De fato, suponha $T(A)=T(B)$,

então:

$$\begin{array}{rcl} T(A) & = & T(B) \Rightarrow \\ T\left(\left[\begin{array}{cc} x_1 & y_1 \\ z_1 & w_1 \end{array}\right]\right) & = & T\left(\left[\begin{array}{cc} x_2 & y_2 \\ z_2 & w_2 \end{array}\right]\right) \Rightarrow \\ (x_1,y_1,z_1,w_1) & = & (x_2,y_2,z_2,w_2) \Rightarrow \\ x_1 = x_2, y_1 = y_2 & & z_1 = z_2, w_1 = w_2. \end{array}$$

Logo, $A = \left[\begin{array}{cc} x_1 & y_1 \\ z_1 & w_1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} x_2 & y_2 \\ z_2 & w_2 \end{array}\right] = B$.

Definição 6.3 Diz-se que uma função $f : D \to E$ é *sobrejetiva* se $\text{Im} f = E$

Ainda no Exemplo 6.3, afirmamos que T é sobrejetiva. Seja $(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4$, é imediato ver que existe uma matriz

$$T\left(\left[\begin{array}{cc} x & y \\ z & w \end{array}\right]\right) = (x,y,z,w).$$

Como T é injetiva e também sobrejetiva, segue que T é bijetiva.

Definição 6.4 Uma transformação linear é chamada de *isomorfismo* se for uma bijeção.

▪ **Exemplo 6.4** Seja a função $H : \mathscr{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ definida por

$$H\left(a+bt+ct^2+dt^3\right) = \left[\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right].$$

Sejam $p(t) = a_1 + b_1 t + c_1 t^2 + d_1 t^3$, $q(t) = a_2 + b_2 t + c_2 t^2 + d_2 t^3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Queremos mostrar que $H(p(t) + \lambda q(t)) = H(p(t)) + \lambda H(q(t))$.

$$\begin{array}{rcl} H(p(t)+\lambda q(t)) & = & H((a_1+b_1t+c_1t^2+d_1t^3)+\lambda(a_2+b_2t+c_2t^2+d_2t^3)) \\ & = & H((a_1+\lambda a_2)+(b_1+\lambda b_2)t+(c_1+\lambda c_2)t^2+(d_1+\lambda d_2)t^3) \\ & = & \left[\begin{array}{cc} a_1+\lambda a_2 & b_1+\lambda b_2 \\ c_1+\lambda c_2 & d_1+\lambda d_2 \end{array}\right] \\ & = & \left[\begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{array}\right] + \lambda \left[\begin{array}{cc} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{array}\right] \\ & = & H(a_1+b_1t+c_1t^2+d_1t^3) + \lambda H(a_2+b_2t+c_2t^2+d_2t^3) \\ & = & H(p(t)) + \lambda H(q(t)). \end{array}$$

Isto mostra que H é uma transformação linear. Temos, neste caso, que H é bijetiva (confira). ▪

▪ **Exemplo 6.5** Considere a composição $G = T \circ H : \mathscr{P}_3 \to \mathbb{R}^4$, com T e H dadas anteriormente. Definimos sua lei de formação:

$$\begin{array}{rcl} G(a+bt+ct^2+dt^3) & = & T \circ H(a+bt+ct^2+dt^3) \\ & = & T(H(a+bt+ct^2+dt^3)) \\ & = & T\left(\left[\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right]\right) \\ & = & (a,b,c,d). \end{array}$$

G é uma bijeção pois T e H são bijeções (confira). G é uma transformação linear?

$$\begin{aligned} G(p(t)+\lambda q(t)) &= (T\circ H)(p(t)+\lambda q(t)) \\ &= T(H(p(t)+\lambda q(t))) \\ &= T(H(p(t))+\lambda H(q(t))) \\ &= T(H(p(t)))+\lambda T(H(q(t))) \\ &= T\circ H(p(t))+\lambda T\circ H(q(t)) \\ &= G(p(t))+\lambda G(q(t)). \end{aligned}$$

Logo, G é uma transformação linear. ∎

■ **Exemplo 6.6** Verificar se $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $T(x,y,z)=x^2+5y-z$, é uma transformação linear.
Temos que T não é uma transformação linear. De fato, seja $\lambda\in\mathbb{R}$ temos

$$T(\lambda(x,y,z))=T(\lambda x,\lambda y,\lambda z)=(\lambda x)^2+5(\lambda y)-\lambda z=\lambda(\lambda x^2+5y-z)\neq\lambda T(x,y,z).$$

∎

■ **Exemplo 6.7** Verificar se $T:\mathbb{M}_{n\times 1}\to\mathbb{M}_{n\times 1}$, $T(X)=AX+X$, com $A\in\mathbb{M}_n$ fixa, é uma transformação linear.
Sejam $X,Y\in\mathbb{M}_{n\times 1}$ e $\lambda\in\mathbb{R}$. Temos que

$$\begin{aligned} T(X+\lambda Y) &= A(X+\lambda Y)+(X+\lambda Y) \\ &= (AX+\lambda AY)+(X+\lambda Y) \\ &= (AX+X)+(\lambda AY+\lambda Y) \\ &= (AX+X)+\lambda(AY+Y) \\ &= T(X)+\lambda T(Y). \end{aligned}$$

Logo, T é uma transformação linear. ∎

O teorema a seguir estabelece uma forma pelo qual podemos achar a lei de uma transformação linear a partir de algumas informações.

Teorema 6.1 Sejam U e V espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) e $B=\{u_1,\cdots,u_n\}$ uma base de U. Sejam $v_1,\cdots,v_n$ elementos arbitrários de V. Então existe uma única transformação linear $T:U\to V$ tal que $T(u_i)=v_i$, para $i=1,\cdots,n$.

Demonstração. Para cada $u\in U$, defina uma aplicação $T:U\to V$ onde

$$T(a_1u_1+\cdots+a_nu_n)=a_1v_1+\cdots+a_nv_n=\sum_{i=1}^{n}a_iv_i,$$

onde $u=a_1u_1+\cdots+a_nu_n$, com $a_1,\cdots,a_n\in\mathbb{K}$. Assim, T é uma aplicação bem definida que associa a cada vetor $u\in U$ um vetor $T(u)\in V$. Note que $T(u_i)=v_i$, para cada $i=1,\cdots,n$.

Afirmamos que T é linear. De fato, sejam $w \in U$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ quaisquer, então existem $b_1, \cdots, b_n \in \mathbb{K}$ tais que $w = b_1u_1 + \cdots + b_nu_n$. Daí, T é linear, uma vez que

$$\begin{aligned} T(u+\lambda w) &= T\left(\sum_{i=1}^{n} a_iu_i + \lambda \sum_{i=1}^{n} b_iu_i\right) \\ &= T\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i+\lambda b_i)u_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} T((a_i+\lambda b_i)u_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (a_i+\lambda b_i)T(u_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (a_i+\lambda b_i)v_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_iv_i + \lambda \sum_{i=1}^{n} b_iv_i \\ &= T(u) + \lambda T(w). \end{aligned}$$

Seja $T' : U \to V$ uma transformação linear tal que $T'(u_i) = v_i$. Então, para todo $u \in U$, temos

$$T'(u) = T'(a_1u_1 + \cdots + a_nu_n) = a_1T'(u_1) + \cdots + a_nT'(u_n) = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n = T(u).$$

Logo, $T' = T$. Isto prova a unicidade da transformação linear T. ■

▪ **Exemplo 6.8** Determine a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, onde $T(1,2) = (1,1)$ e $T(3,4) = (2,2)$.

Note que o conjunto $\{(1,2),(3,4)\}$ forma uma base para $\mathbb{R}^2$ (confira). Portanto, qualquer elemento de $\mathbb{R}^2$ pode ser gerado a partir desta base da seguinte forma:

$$(x,y) = a(1,2) + b(3,4).$$

Encontramos, daí, os valores de a, b:

$$\begin{cases} a+3b = x \\ 2a+4b = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3y-4x}{2} \\ b = \frac{2x-y}{2} \end{cases}.$$

Portanto, usando a linearidade de T, temos

$$\begin{aligned}
(x,y) &= \frac{3y-4x}{2}(1,2)+\frac{2x-y}{2}(3,4)\\
T(x,y) &= T\left(\frac{3y-4x}{2}(1,2)+\frac{2x-y}{2}(3,4)\right)\\
T(x,y) &= \frac{3y-4x}{2}T(1,2)+\frac{2x-y}{2}T(3,4)\\
T(x,y) &= \frac{3y-4x}{2}(1,1)+\frac{2x-y}{2}(2,2)\\
T(x,y) &= \left(\frac{3y-4x}{2},\frac{3y-4x}{2}\right)+\left(\frac{2x-y}{2}\cdot 2,\frac{2x-y}{2}\cdot 2\right)\\
T(x,y) &= \left(\frac{3y-4x}{2}+2x-y,\frac{3y-4x}{2}+2x-y\right)\\
T(x,y) &= \left(\frac{y}{2},\frac{y}{2}\right),
\end{aligned}$$

que é a transformação procurada. ∎

∎ **Exemplo 6.9** Achar a tranformação linear $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, onde $T(1,0,0)=(1,1)$, $T(0,1,0)=(1,0)$ e $T(0,0,1)=(-2,3)$.

Temos que

$$(x,y,z)=x(1,0,0)+y(0,1,0)+z(0,0,1).$$

Agora, basta aplicar T a ambos os membros da equação acima:

$$\begin{aligned}
T(x,y,z) &= T(x(1,0,0)+y(0,1,0)+z(0,0,1))\\
T(x,y,z) &= xT(1,0,0)+yT(0,1,0)+zT(0,0,1)\\
T(x,y,z) &= x(1,1)+y(1,0)+z(-2,3)\\
T(x,y,z) &= (x+y-2z,x+3z).
\end{aligned}$$

Portanto, $T(x,y,z)=(x+y-2z,x+3z)$ é a lei para T procurada. ∎

∎ **Exemplo 6.10** Determine a transformação linear $T:\mathscr{P}_3(\mathbb{R})\to\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$, onde $T(1)=1+t$, $T(t)=2t^2-1$, $T(t^2)=1+t^3$ e $T(t^3)=t^2+t+1$.

Note que o conjunto $\{1,t,t^2,t^3\}$ é a base canônica de $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$. Portanto, qualquer elemento de $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ pode ser gerado a partir desta base da seguinte forma:

$$p(t)=x+yt+zt^2+wt^3=x\cdot 1+yt+zt^2+wt^3.$$

Agora, basta aplicar T a ambos os membros da equação acima:

$$\begin{aligned}
T(p(t)) &= T(x\cdot 1+yt+zt^2+wt^3)\\
T(p(t)) &= xT(1)+yT(t)+zT(t^2)+wT(t^3)\\
T(p(t)) &= x(1+t)+y(2t^2-1)+z(1+t^3)+w(t^2+t+1)\\
T(p(t)) &= x-y+z+w+(x+w)t+(2y+w)t^2+zt^3,
\end{aligned}$$

que é a transformação procurada. ∎

6.1 O espaço $\mathscr{L}(U,V)$

Sejam U e V espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$. Sendo $\mathscr{L}(U,V)$ o conjunto de todas as transformações lineares $T : U \to V$, definimos as seguintes operações em $\mathscr{L}(U,V)$:

- $T+S : U \to V$ por $(T+S)(u) = T(u)+S(u)$;
- $\lambda T : U \to V$ por $(\lambda T)(u) = \lambda T(u)$.

Note que, com estas operações $\mathscr{L}(U,V)$ é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$. De fato, sejam $T,S \in \mathscr{L}(U,V)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ então:

$$(T+\lambda S)(u) = T(u)+(\lambda S)(u) = T(u)+\lambda S(u) : U \to V$$

pois o domínio e o contradomínio são invariantes pela soma ou produto de função em $\mathscr{L}(U,V)$. Logo, $T+\lambda S \in \mathscr{L}(U,V)$.

6.1.1 O dual de um espaço vetorial

Seja $U(\mathbb{K})$ um espaço vetorial de dimensão n. Definimos o dual de U (notação: U' ou $U^* = \mathscr{L}(U,\mathbb{K})$) como o conjunto formado por todas as transfomações lineares de U em $\mathbb{R}$, i.e., todas as transformações lineares $f : U \to \mathbb{K}$. A transformação f é chamada de *funcional linear* ou *forma linear*.

▪ **Exemplo 6.11** Seja $U = \mathbb{R}^2$ e considere a base $B = \{(1,1),(1,-1)\}$. Note que todo par ordenado (x,y) pode ser escrito como combinação linear dos vetores da base B:

$$(x,y) = \frac{x+y}{2}(1,1)+\frac{x-y}{2}(1,-1).$$

Observe que temos duas funções reais na expressão acima:

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f_1(x,y) = \frac{x+y}{2} \quad \text{e} \quad f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f_2(x,y) = \frac{x-y}{2}.$$

Temos que $f_1, f_2 \in U^*$ e, além disso, $U^* = \left(\mathbb{R}^2\right)^* = [f_1, f_2]$.

Note que $f_1(1,1) = 1$ e também $f_1(1,-1) = 0$. Temos também que $f_2(1,1) = 0$ e $f_2(1,-1) = 1$. ▪

Proposição 6.1 Seja $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ uma base do espaço vetorial $V(\mathbb{K})$. A dimensão do espaço dual $V^* = \mathscr{L}(V,\mathbb{K})$ é a mesma dimensão do espaço V e, ainda, o conjunto $B^* = \{f_1, \cdots, f_n\}$ onde

$$f_i(v_j) = \begin{cases} 1, \text{ se } i = j \\ 0, \text{ se } i \neq j \end{cases},$$

é a base dual de V^*.

Demonstração. Perceba que cada f_i é linear (verifique isso). Afirmamos que B^* é LI. Seja $\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n = 0$. Temos que

$$(\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_i f_i + \cdots + \alpha_n f_n)(v_i) = 0 \implies \alpha_i f_i(v_i) = 0 \implies \alpha_i = 0,$$

para cada $i = 1, \cdots, n$. Portanto, B^* é LI em V^*. Por fim, mostramos que B^* gera todo o espaço dual V^*. De fato, seja $g \in V^*$, temos

$$\begin{aligned} g(u) &= g(a_1v_1 + \cdots + a_nv_n) \\ &= a_1g(v_1) + \cdots + a_ng(v_n) \\ &= f_1(u)g(v_1) + \cdots + f_n(u)g(v_n), \end{aligned}$$

pois $f_i(u) = f_i(a_1v_1 + \cdots + a_nv_n) = a_i$. Logo, B^* é uma base de V^*. ■

▪ **Exemplo 6.12** Considere $U = \mathbb{R}^3$ e sua base canônica $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$. Vamos encontrar uma base do espaço dual U^*. Toda terna ordenada de $\mathbb{R}^3$, pode ser escrita como

$$(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1).$$

Na expressão acima, temos três funções

$$f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f_1(x,y,z) = x, f_2(x,y,z) = y, f_3(x,y,z) = z.$$

Temos que $U^* = [f_1, f_2, f_3]$. Essa é exatamente a base canônica do espaço dual U^*. Note que f_1, f_2 e f_3 são as projeções nos eixos coordenados em $\mathbb{R}^3$. Em algumas situações, tais projeções podem ser representadas, por conveniência, como dx_1, dx_2 e dx_3 em lugar de f_1, f_2 e f_3. ▪

▪ **Exemplo 6.13** Seja o espaço vetorial $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$. Vamos encontrar uma base do dual de $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$. Para isto, vamos usar a base canônica do espaço $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$, a saber, $C = \{1, t, t^2\}$. Sabemos que, dado qualquer polinômio, $p(t) = a + bt + ct^2$. Daí, $f(p(t)) = a, g(p(t)) = b$ e $h(p(t)) = c$.

Portanto, $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R}))^* = [f,g,h]$. Logo, $\{f,g,h\}$ é uma base de $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})^*$. ▪

▪ **Exemplo 6.14** Considere o espaço das matrizes quadradas de ordem 2, $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$. Seja

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Achemos a combinação linear de uma matriz qualquer de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, com relação à base B:

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\implies \begin{cases} a+b+c+d = x \\ b+c+d = y \\ c+d = z \\ d = t \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} a = x-y \\ b = y-z \\ c = z-t \\ d = t \end{cases}.$$

Logo,

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = (x-y)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + (y-z)\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + (z-t)\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.1)$$

Temos que a dimensão do dual de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ é igual a 4 e, portanto, sua base dual é $B^* = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$, com as seguintes propriedades:

$$f_1\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 1, f_1\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 0, f_1\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = 0, f_1\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0.$$

Aplicando f_1 na equação 6.1, temos

$$\begin{aligned} f_1\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}\right) &= (x-y)f_1\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) + (y-z)f_1\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) + \\ &\quad (z-t)f_1\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) + tf_1\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) \\ &= x-y. \end{aligned}$$

Da mesma forma, obtemos que $f_2 = y-z, f_3 = z-t$ e $f_4 = t$. ∎

6.2 Núcleo e Imagem

Sejam U e V espaços vetoriais e $T : U \to V$ uma transformação linear.

Definição 6.5 Definimos o **núcleo** de T (notação: $\ker(T)$, $\mathcal{N}(T)$, $Nuc(T)$) como o subconjunto de U tal que a imagem de seus elementos é sempre nula:

$$\mathcal{N}(T) = \{u \in U : T(u) = 0\}.$$

Afirmamos que o núcleo de uma transformação linear é um espaço vetorial. De fato, sejam $u, w \in \mathcal{N}(T)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Temos:

$$T(u+\lambda w) = T(u) + \lambda T(w) = 0 + \lambda 0 = 0.$$

Logo, $u+\lambda w \in \mathcal{N}(T)$. Assim, o núcleo $\mathcal{N}(T)$ é um subespaço vetorial de U.

■ **Exemplo 6.15** Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, definida como $T(x,y,z) = (x+y, x-y)$. Vamos calcular o núcleo desta transformação linear. Precisamos encontrar todas as ternas ordenadas (x,y,z) tais que $T(x,y,z) = (0,0)$.

$$T(x,y,z) = (0,0) \Rightarrow (x+y, x-y) = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}.$$

Observe que, uma vez que a variável z não influencia na lei de T, então todo vetor da forma $(0,0,z)$ tem imagem nula. Logo, $\mathcal{N}(T) = \{(0,0,z); z \in \mathbb{R}\} = [(0,0,1)]$. Isso mostra que $\dim \mathcal{N}(T) = 1$. ∎

▪ **Exemplo 6.16** Considere a transformação linear $T : \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$, definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\right) = (x+y+z, y+z+w, x-y-w).$$

Vamos encontrar o núcleo desta transformação.

$$T\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\right) = (0,0,0) \quad \Rightarrow \quad (x+y+z, y+z+w, x-y-w) = (0,0,0)$$
$$\Rightarrow \quad \begin{cases} x+y+z=0 \\ y+z+w=0 \\ x-y-w=0 \end{cases}$$

Da equação 3, temos que $w = x-y$, daí o sistema pode ser reduzido a

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ y+z+x-y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ z+x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ z+x=0 \end{cases}$$

Portanto, a solução do sistema não é única e é dada por

$$\begin{cases} y=0 \\ z=-x \\ w=x \end{cases}$$

Logo, o núcleo da transformação linear é dado por

$$\begin{aligned} \mathscr{N}(T) &= \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_2; y=0, z=-x, w=x \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 \\ -x & x \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_2; x \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ x \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_2; x \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right]. \end{aligned}$$

▪

O núcleo de uma transformação linear T e chamado de *trivial* se o núcleo é o espaço nulo, i.e., $\mathscr{N}(T) = \{0\}$.

Definição 6.6 A **imagem** $\mathrm{Im}(T)$ é o conjunto imagem de T, i.e.,

$$\mathrm{Im}(T) = \{v \in V : \exists u \in U, \text{ onde } v = T(u)\}.$$

A noção de imagem de uma função existe para qualquer tipo de função. Porém, para transformações lineares o conjunto imagem é um espaço vetorial.

De fato, sejam $v_1, v_2 \in \text{Im}(T)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Como $v_1, v_2 \in \text{Im}(T)$ então existem $u_1, u_2 \in U$ tal que $T(u_1) = v_1$ e $T(u_2) = v_2$. Daí,

$$v_1 + \lambda v_2 = T(u_1) + \lambda T(u_2) = T(u_1) + T(\lambda u_2) = T(u_1 + \lambda u_2).$$

Logo, existem um $u \in U$ tal que $v_1 + \lambda v_2 = T(u)$. Portanto, $v_1 + \lambda v_2 \in \text{Im}(T)$. Isto mostra que o conjunto $\text{Im}(T)$ é um espaço vetorial.

▪ **Exemplo 6.17** Considere, novamente, a transformação $T : \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$, definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\right) = (x+y+z, y+z+w, x-y-w).$$

Temos aqui que

$$\begin{aligned} \text{Im}(T) &= \{(x+y+z, y+z+w, x-y-w); x,y,z,w \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x,0,x)+(y,y,-y)+(z,z,0)+(0,w,-w); x,y,z,w \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1,0,1)+y(1,1,-1)+z(1,1,0)+w(0,1,-1); x,y,z,w \in \mathbb{R}\} \\ &= [(1,0,1),(1,1,-1),(1,1,0),(0,1,-1)] \end{aligned}$$

Note que o conjunto acima não é base uma vez que possui quatro elementos, portanto, é um conjunto LD em $\mathbb{R}^3$. Vamos eliminar os vetores supérfluos organizando estes vetores em uma matriz e escalonando tal matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$L_3 = L_1 - L_3$ e $L_4 = L_1 - L_4$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$L_4 = L_2 + L_4$ e $L_3 = L_2 + L_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Temos uma matriz com 3 linhas não nulas, isto significa que do conjunto acima, três vetores são linearmente independentes. Logo, uma base para o espaço imagem pode ser dada por $B = \{(1,0,1),(1,1,-1),(0,1,-1)\}$. Assim, $\dim \text{Im}(T) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$. Logo, $\text{Im}(T) = \mathbb{R}^3$. ▪

▪ **Exemplo 6.18** Um funcional linear $f : V \to \mathbb{R}$ ou é sobrejetivo ou é nulo.

De fato, temos que $f(V)$ é um espaço vetorial. Como os subespaços vetoriais de $\mathbb{R}$ são $\{0\}$ ou o próprio $\mathbb{R}$, segue o resultado. ▪

Proposição 6.2 Seja $T : U \to V$ uma transformação linear. T é injetiva se, e somente se, $\mathscr{N}(T) = \{0\}$.

Demonstração. Suponha que $T : U \to V$ seja injetiva. Isto é, $T(u) = T(v) \Rightarrow u = v$. Seja $u \in \mathscr{N}(T)$, então $T(u) = 0$. Da propriedade de transformação linear, sabemos que $T(0) = 0$. Portanto,

$$T(u) = 0 \Rightarrow T(u) = T(0) \Rightarrow u = 0.$$

Logo, o núcleo é trivial. Reciprocamente, suponha que $\mathscr{N}(T) = \{0\}$. Suponha que existam $u, v \in U$ tal que $T(u) = T(v)$ então $T(u) - T(v) = 0$, como T é uma transformação linear, temos que $T(u - v) = 0$, isto significa que $u - v \in \mathscr{N}(T)$. Daí, $u - v = 0$. Logo, $u = v$, o que implica que T é injetiva. ■

Proposição 6.3 Uma transformação linear é injetiva se, e somente se, leva vetores LI em vetores LI.

Demonstração. Suponha $T : U \to V$ uma transformação linear injetiva. Sejam os vetores $v_1, \cdots, v_n \in U$ linearmente independentes. Considere a combinação linear

$$a_1 T(v_1) + a_2 T(v_2) + \cdots + a_n T(v_n) = 0.$$

Usamos a linearidade de T para obter

$$T(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n) = 0.$$

Isto implica que $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n \in \mathscr{N}(T)$. Mas $\mathscr{N}(T) = \{0\}$, pois T é injetiva. Portanto,

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n = 0.$$

Uma vez que $v_1, \cdots, v_n \in U$ são L.I., segue que $a_1 = \cdots = a_n = 0$. Logo, $T(v_1), \cdots, T(v_n)$ são vetores LI. Reciprocamente, suponha $T : U \to V$ uma transformação linear que leva vetores LI em vetores LI. Em particular, T leva a base $\{u_1, \cdots, u_n\}$ de U em vetores LI $\{T(u_1), \cdots, T(u_n)\}$. Seja $u \in \mathscr{N}(T)$, então existem $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$T(u) = T(a_1 u_1 + \cdots + a_n v_n) = 0 \implies a_1 T(u_1) + \cdots + a_n T(v_n) = 0,$$

pela linearidade de T. Como os vetores $T(u_1), \cdots, T(u_n)$ são LI então $a_1 = \cdots = a_n = 0$. Portanto, $u = 0$, de onde seque que o núcleo é trivial. Logo, T é injetiva.

■

6.3 Teorema do Núcleo e da Imagem

Lembre que o núcleo e a imagem de uma transformação linear $T : U \to V$ são definidos como

$$\mathcal{N}(T) = \{u \in U : T(u) = 0\},$$

$$\text{Im}(T) = \{v \in V : \exists u \in U, \text{ com } v = T(u)\}.$$

O resultado a seguir é um dos mais importantes resultados da Álgebra Linear.

Teorema 6.2 Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão finita e $T : U \to V$ uma transformação linear. Então,

$$\dim U = \dim \mathcal{N}(T) + \dim \text{Im}(T).$$

Demonstração. Sejam $u_1, \cdots, u_p$ vetores de U tais que $\{T(u_1), \cdots, T(u_p)\}$ seja uma base para $\text{Im}(T)$, a imagem de T. Considere também o conjunto $\{v_1, \cdots, v_q\}$ uma base para o núcleo de T. Afirmamos que o conjunto $\{u_1, \cdots, u_p, v_1, \cdots, v_q\}$ é uma base para o espaço U. Sejam $a_1, \cdots, a_p, b_1, \cdots, b_q \in \mathbb{K}$. Suponha que

$$a_1u_1 + \cdots + a_pu_p + b_1v_1 + \cdots + b_qv_q = 0. \tag{6.2}$$

Aplicamos T a ambos os membros desta igualdade e usamos a linearidade de T para obter

$$a_1T(u_1) + \cdots + a_pT(u_p) + b_1T(v_1) + \cdots + b_qT(v_q) = 0.$$

Como cada v_j pertence ao núcleo de T então $T(v_j) = 0$, $j \in \{1, \cdots, q\}$. Portanto, a equação acima pode ser escrita como

$$a_1T(u_1) + \cdots + a_pT(u_p) = 0.$$

Como os vetores $T(u_1), \cdots, T(u_p)$ são LI, segue que $a_1 = \cdots = a_p = 0$. Desta forma, a Equação 6.2 pode ser escrita como

$$b_1v_1 + \cdots + b_qv_q = 0.$$

Como $v_1, \cdots, v_q$ são LI, segue que $b_1 = \cdots = b_q = 0$. Assim, o conjunto $\{u_1, \cdots, u_p, v_1, \cdots, v_q\}$ é LI. Considere agora um elemento $u \in U$. Então $T(u) \in \text{Im}(T)$, isto é, $T(u)$ pode ser escrito como

$$\begin{aligned} T(u) &= a_1T(u_1) + \cdots + a_pT(u_p) \\ T(u) &= T(a_1u_1 + \cdots + a_pu_p) \\ T(u) - T(a_1u_1 + \cdots + a_pu_p) &= 0 \\ T(u - (a_1u_1 + \cdots + a_pu_p)) &= 0. \end{aligned}$$

Desta forma, $u - (a_1u_1 + \cdots + a_pu_p) \in \mathcal{N}(T)$. Portanto, pode ser escrito como combinação linear dos vetores da base do núcleo

$$\begin{aligned} u - (a_1u_1 + \cdots + a_pu_p) &= b_1v_1 + \cdots + b_qv_q \\ u &= a_1u_1 + \cdots + a_pu_p + b_1v_1 + \cdots + b_qv_q. \end{aligned}$$

Assim, $\{u_1,\cdots,u_p,v_1,\cdots,v_q\}$ gera os elementos de U. Logo, $\{u_1,\cdots,u_p,v_1,\cdots,v_q\}$ é uma base de U. Isso mostra que

$$\dim U = p+q = \dim Im(T) + \dim \mathscr{N}(T).$$

■

▪ **Exemplo 6.19** Seja $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y,z) = (x-y, x+y-z)$.
Vamos encontrar o núcleo e a imagem de T.
Achemos todos as ternas ordenadas (x,y,z) tais que $T(x,y,z) = (0,0)$.

$$T(x,y,z) = (0,0) \Rightarrow (x-y,x+y-z) = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}.$$

Da equação 1, temos que $x = y$. Substituindo isto na equação 2, temos $z = 2x$. Portanto,

$$\mathscr{N}(T) = \{(x,x,2x) : x \in \mathbb{R}\} = \{x(1,1,2) : x \in \mathbb{R}\} = [(1,1,2)].$$

Assim, $\dim \mathscr{N}(T) = 1$. Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, podemos estimar qual a dimensão da imagem de T:

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \mathscr{N}(T) + \dim \mathrm{Im}(T) \Rightarrow 3 = 1 + \dim \mathrm{Im}(T) \Rightarrow \dim \mathrm{Im}(T) = 2.$$

De fato, o conjunto imagem é dado por $\mathrm{Im}(T) = \{(x-y,x+y-z) : x,y,z \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(T) &= \{(x-y,x+y-z) : x,y,z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1,1)+y(-1,1)+z(0,-1) : x,y,z \in \mathbb{R}\} \\ &= [(1,1),(-1,1),(0,-1)]. \end{aligned}$$

Os vetores $(1,1),(-1,1),(0,-1)$ são LD. Logo, $B = \{(1,1),(-1,1)\}$ é uma base para $\mathrm{Im}(T)$. Logo, $\dim \mathrm{Im}(T) = 2$. ▪

Proposição 6.4 Seja $T : U \to V$ uma transformação linear, com $\dim U = \dim V$. Então T é injetiva se, e somente se, T é sobrejetiva.

Demonstração. Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, temos que

$$\dim U = \dim \mathscr{N}(T) + \dim \mathrm{Im}(T).$$

Uma vez que T é injetiva, temos que o núcleo é trivial, o que implica que $\dim \mathscr{N}(T) = 0$. Como $\dim U = \dim V$ então

$$\begin{aligned} \dim U &= \dim \mathscr{N}(T) + \dim \mathrm{Im}(T) \Rightarrow \\ \dim V &= 0 + \dim \mathrm{Im}(T) \Rightarrow \\ \dim V &= \dim \mathrm{Im}(T). \end{aligned}$$

Logo, $V = \mathrm{Im}(T)$, o que implica que T é sobrejetiva. Por outro lado, sendo T sobrejetiva, segue que $\dim Im(T) = \dim V$. Do Teorema do Núcleo e da Imagem, temos então que

$$\dim U = \dim \mathscr{N}(T) + \dim V \Rightarrow \dim V = \dim \mathscr{N}(T) + \dim V \Rightarrow \dim \mathscr{N}(T) = 0.$$

Logo, T é injetiva. ■

▪ **Exemplo 6.20** Ache o núcleo e imagem da transformação $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, definida por, $T(x,y,z,w) = (x+y, z+w, x+z, y+w)$. T é sobrejetiva? Justifique.

A ideia é calcular o núcleo dessa transformação linear e verificar se T é injetiva, pois o domínio é igual ao contradomínio e, portanto, têm a mesma dimensão. Calculando o núcleo: se $(x,y,z,w) \in \mathscr{N}(T)$ então

$$\begin{aligned} T(x,y,z,w) = (0,0,0,0) &\Rightarrow (x+y, z+w, x+z, y+w) = (0,0,0,0) \\ &\Rightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ z+w=0 \\ x+z=0 \\ y+w=0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ z-y=0 \\ x+z=0 \\ w=-y \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x=-y \\ z=y \\ w=-y \end{cases} . \end{aligned}$$

Assim, temos que o núcleo é $\mathscr{N}(T) = \{(-y,y,y,-y) : y \in \mathbb{R}\} = [(-1,1,1,-1)] \neq \{0\}$. Isto implica que T não é injetiva, pois o núcleo de T não é trivial. Logo, T não é sobrejetiva. De fato, pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, temos que

$$\dim \mathbb{R}^4 = \dim \mathscr{N}(T) + \dim \mathrm{Im}(T) \Rightarrow 4 = 1 + \dim \mathrm{Im}(T) \Rightarrow \dim \mathrm{Im}(T) = 3 \neq \dim \mathbb{R}^4.$$

Outra abordagem para verificar se T é sobrejetiva, é calcular a dimensão da imagem de T diretamente. Observe que

$$\begin{aligned} Im(T) &= \{(x+y, z+w, x+z, y+w); x,y,z,w \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1,0,1,0) + y(1,0,0,1) + z(0,1,1,0) + w(0,1,0,1); x,y,z,w \in \mathbb{R}\} \\ &= [(1,0,1,0),(1,0,0,1),(0,1,1,0),(0,1,0,1)]. \end{aligned}$$

Como os vetores geradores de $Im(T)$ são LD, segue que $\dim Im(T) < \dim \mathbb{R}^4 = 4$. ▪

▪ **Exemplo 6.21** Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear tal que

$$T(1,0,0) = (2,3,1), \quad T(1,1,0) = (5,2,7), \quad T(1,1,1) = (-2,0,7).$$

1. Encontre $T(x,y,z)$.

Temos que o conjunto $\{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ é uma base para $\mathbb{R}^3$. Assim, sendo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, temos que

$$\begin{aligned}
(x,y,z) &= a(1,0,0)+b(1,1,0)+c(1,1,1)\\
(x,y,z) &= (a+b+c,b+c,c)\\
&\Rightarrow \begin{cases} a+b+c=x \\ b+c=y \\ c=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=x-y \\ b=y-z \\ c=z \end{cases}\\
(x,y,z) &= (x-y)(1,0,0)+(y-z)(1,1,0)+z(1,1,1)
\end{aligned}$$

Aplicando a transformação T a ambos os lados da equação acima:

$$\begin{aligned}
T(x,y,z) &= T((x-y)(1,0,0)+(y-z)(1,1,0)+z(1,1,1)) \Rightarrow\\
T(x,y,z) &= (x-y)T(1,0,0)+(y-z)T(1,1,0)+zT(1,1,1) \Rightarrow\\
T(x,y,z) &= (x-y)(2,3,1)+(y-z)(5,2,7)+z(-2,0,7) \Rightarrow\\
T(x,y,z) &= (2x+3y-7z,3x-y-2z,x+6y).
\end{aligned}$$

2. T é injetora?
   Para verificar se T é injetora, devemos calcular o núcleo da transformação linear:

$$\mathcal{N}(T) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : T(x,y,z) = (0,0,0)\}.$$

   De fato, note que

$$\begin{aligned}
T(x,y,z) &= (0,0,0) \Rightarrow\\
(2x+3y-7z,3x-y-2z,x+6y) &= (0,0,0) \Rightarrow\\
&\begin{cases} 2x+3y-7z=0 \\ 3x-y-2z=0 \\ x+6y=0 \end{cases}
\end{aligned}$$

   Da equação (3), temos que $x=-6y$. Substituindo isto, nas equações (1) e (2) temos o sistema:

$$\begin{cases} 2(-6y)+3y-7z=0 \\ 3(-6y)-y-2z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -9y-7z=0 \\ -19y-2z=0 \end{cases}$$

   Da equação (1), temos que $y=-\frac{7}{9}z$. Basta substituir este resultado na equação (2): $\frac{133}{9}z-2z=0 \Rightarrow z=0$. Isso implica que $y=0$. E da equação (3) segue que $x=0$. Logo, $(0,0,0)$ é a única solução possível para o sistema acima. Ou seja, $\mathcal{N}(T)=\{(0,0,0)\}$. Portanto, T é injetiva.
3. T é sobrejetora?
   Temos que $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é injetora. Note que o domínio de T é igual ao contradomínio, portanto tem dimensões iguais. Logo, pela Proposição 6.4, como T é injetiva segue que T é sobrejetiva.

4. T é bijetora? Sim, pois é injetora e sobrejetora.
5. Ache T^{-1}.
   Note que

$$T^{-1}(2,3,1)=(1,0,0),\quad T^{-1}(5,2,7)=(1,1,0),\quad T^{-1}(-2,0,7)=(1,1,1)$$

Temos que o conjunto $\{(2,3,1),(5,2,7),(-2,0,7)\}$ é uma base do espaço $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
(x,y,z) &= a(2,3,1)+b(5,2,7)+c(-2,0,7)\\
(x,y,z) &= (2a+5b-2c,3a+2b,a+7b+7c)\\
&\Rightarrow \begin{cases} 2a+5b-2c=x\\ 3a+2b=y\\ a+7b+7c=z\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a+5b-2c=x\\ 3a+2b=y\\ a=z-7b-7c\end{cases}\\
&\Rightarrow \begin{cases} 2(z-7b-7c)+5b-2c=x\\ 3(z-7b-7c)+2b=y\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -9b-16c=x-2z\\ -19b-21c=y-3z\end{cases}\\
&\Rightarrow \begin{cases} 9b+16c=-x+2z\\ 19b+21c=-y+3z\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=\frac{-x+2z-16c}{9}\\ 19b+21c=-y+3z\end{cases}\\
&\Rightarrow \begin{cases} b=\frac{-x+2z-16c}{9}\\ 19\left(\frac{-x+2z-16c}{9}\right)+21c=-y+3z\end{cases}
\end{aligned}$$

Temos

$$\begin{aligned}
19\left(\frac{-x+2z-16c}{9}\right)+21c=-y+3z &\Rightarrow 19(-x+2z-16c)+189c=-9y+27z\\
&\Rightarrow -19x+38z-304c+189c=-9y+27z\\
&\Rightarrow -115c=19x-9y+11z\\
&\Rightarrow c=-\frac{19x-9y+11z}{115}.
\end{aligned}$$

Temos daí que

$$\begin{aligned}
b &= \frac{-x+2z-16c}{9}\\
&= \frac{-x+2z-16\left(-\frac{19x-9y+11z}{115}\right)}{9}\\
&= \frac{-115x+230z+304x-144y+176z}{1035}\\
&= \frac{189x-144y+406z}{1035}
\end{aligned}$$

Faça o restante como exercício.

■

6.4 Isomorfismos

Definição 6.7 Diz-se que uma transformação linear $T : U \to V$ é um *isomorfimo* se T é bijetiva. Neste caso, diz-se que U e V são isomorfos, e representamos por $U \simeq V$. No caso em que $U = V$, diz-se que T é um *automorfismo*.

Em outras palavras, se U é isomorfo a V então podemos dizemos que U e V são 'idênticos' no sentido de que preservam determinadas características.

Note que se dois espaços são isomorfos então, pela Proposição 6.4, eles têm dimensões iguais. Por exemplo, os espaços $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ não são isomorfos, pois têm dimensões diferentes.

▪ **Exemplo 6.22** Os espaços $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}^3$ são isomorfos.

Defina a aplicação $T : \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ por $T(a+bt+ct^2) = (a,b,c)$. Note que T é uma transformação linear (confira). Afirmamos que T é injetiva. De fato, calculamos o núcleo de T. Para isto, devemos ter

$$T(a+bt+ct^2) = (a,b,c) = (0,0,0) \Rightarrow a = b = c = 0.$$

Portanto, o núcleo de T é trivial e isto mostra que T é injetiva. Como $\dim \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, segue que T é sobrejetiva, logo bijetiva. ▪

O resultado a seguir mostra que dois espaços vetoriais de mesma dimensão são isomorfos.

Teorema 6.3 Dois espaços vetoriais de dimensão finita são isomorfos se, e somente se, têm a mesma dimensão.

Demonstração. Suponha que os espaços U e V sejam isomorfos. Então existe um isomorfismo $T : U \to V$. Em particular, T é injetiva e seu núcleo é trivial, o que implica que $\dim \mathscr{N}(T) = 0$. Como T é sobrejetiva, segue que $\dim \mathrm{Im}(T) = \dim V$. Do Teorema do Núcleo e Imagem, temos que

$$\dim U = \dim \mathscr{N}(T) + \dim \mathrm{Im}(T) \Rightarrow \dim U = \dim V.$$

Reciprocamente, seja V um espaço de dimensão n. Considere $\{v_1, \cdots, v_n\}$ uma base de V, então podemos definir uma aplicação linear $T : \mathbb{R}^n \to V$ pondo $T(a_1, \cdots, a_n) = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$. Note que $T(e_1) = v_1, \cdots, T(e_n) = v_n$. Isto é, T leva a base canônica de $\mathbb{R}^n$ para uma base de V. Em particular, T leva vetores LI em vetores LI. Portanto, T é injetiva e daí, pela Proposição 6.4 segue que T é um isomorfismo. Logo, qualquer espaço vetorial V de dimensão n é isomorfo a $\mathbb{R}^n$. ■

Corolário 6.1 Qualquer espaço vetorial real de dimensão n é isomorfo a $\mathbb{R}^n$.

Que o leitor pare um pouco a sua leitura neste ponto e releia o enunciado do Teorema 6.3 e de seu corolário. Consegue perceber a beleza desse resultado? Até o momento, estudamos espaços vetorias de variadas qualidades, sejam espaços polinomiais ou matriciais, espaços de funções, etc. Agora entendemos que qualquer um destes espaços vetoriais são isomorfos a algum $\mathbb{R}^n$.

▪ **Exemplo 6.23** Seja $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y,z)=(2x+y,x+y-z,x-2z)$. Verifique se T é invertível e, em caso positivo, calcule a sua inversa.

Verificamos se T é um isomorfismo. Note que T é um operador linear (domínio é igual ao contradomínio). Ou seja, os espaços têm a mesma dimensão. Para verificar se T é invertível, basta verificar se T é injetiva. Para isso, calculamos o núcleo de T:

$$\begin{aligned} T(x,y,z)=(0,0,0) &\Rightarrow (2x+y,x+y-z,x-2z)=(0,0,0)\\ &\Rightarrow \begin{cases} 2x+y=0\\ x+y-z=0\\ x-2z=0 \end{cases}\\ &\Rightarrow \begin{cases} x=0\\ y=0\\ z=0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Isto mostra que o núcleo de T é trivial, portanto T é injetiva e, consequentemente, bijetiva. Portanto, T é investível. Para calcular a inversa, tomamos a base canônica de $\mathbb{R}^3$ e calculamos a imagem da base por T:

$$T(1,0,0)=(2,1,1),\quad T(0,1,0)=(1,1,0),\quad T(0,0,1)=(0,-1,-2).$$

Portanto,

$$(1,0,0)=T^{-1}(2,1,1),\quad (0,1,0)=T^{-1}(1,1,0),\quad (0,0,1)=T^{-1}(0,-1,-2).$$

Temos daí que o conjunto $\{(2,1,1),(1,1,0),(0,-1,-2)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$, pois todo isomorfismo leva base em base. Escrevemos um vetor (x,y,z) como combinação linear desta base:

$$(x,y,z)=a(2,1,1)+b(1,1,0)+c(0,-1,-2)\Rightarrow \begin{cases} 2a+b=x\\ a+b-c=y\\ a-2c=z \end{cases}$$

Da equação 2, temos que $c=a+b-y$, substituindo na equação 3, temos o sistema:

$$\begin{cases} 2a+b=x\\ c=a+b-y\\ a-2(a+b-y)=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a+b=x\\ c=a+b-y\\ a+2b=2y-z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=x-2a\\ c=a+(x-2a)-y\\ a+2(x-2a)=2y-z \end{cases}$$

Da equação 3, temos:

$$a+2(x-2a)=2y-z\Rightarrow -3a=-2x+2y-z\Rightarrow a=\frac{2x-2y+z}{3}.$$

Da equação 1, temos

$$b=x-2a\Rightarrow b=x-2\cdot\frac{2x-2y+z}{3}\Rightarrow b=\frac{-x+4y-2z}{3}$$

Da equação 2, temos

$$c = x - y - a \Rightarrow c = x - y - \frac{2x-2y+z}{3} \Rightarrow c = \frac{x-y-z}{3}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
(x,y,z) &= \frac{2x-2y+z}{3}(2,1,1) + \frac{-x+4y-2z}{3}(1,1,0) + \frac{x-y-z}{3}(0,-1,-2) \Rightarrow \\
T^{-1}(x,y,z) &= \frac{2x-2y+z}{3}T^{-1}(2,1,1) + \frac{-x+4y-2z}{3}T^{-1}(1,1,0) + \frac{x-y-z}{3}T^{-1}(0,-1,-2) \Rightarrow \\
T^{-1}(x,y,z) &= \frac{2x-2y+z}{3}(1,0,0) + \frac{-x+4y-2z}{3}(0,1,0) + \frac{x-y-z}{3}(0,0,1) \Rightarrow \\
T^{-1}(x,y,z) &= \frac{1}{3}(2x-2y+z, -x+4y-2z, x-y-z)
\end{aligned}$$

é a inversa de T. ∎

∎ **Exemplo 6.24** Verifique se $\mathbb{R}^2$ é isomorfo ao espaço $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x+y-z=0\}$.
Inicialmente, sabe-se que $\dim \mathbb{R}^2 = 2$. Temos também que $\dim V = 2$, pois,

$$\begin{aligned}
V &= \{(x,y,x+y); x,y \in \mathbb{R}\} \\
&= \{x(1,0,1) + y(0,1,1); x,y \in \mathbb{R}\} \\
&= [(1,0,1),(0,1,1)].
\end{aligned}$$

Obviamente o conjunto $\{(1,0,1),(0,1,1)\}$ é LI e constitui uma base para V. Como $\dim V = \dim \mathbb{R}^2$ segue que $V \simeq \mathbb{R}^2$, pois espaços vetoriais de dimensões iguais são isomorfos. ∎

6.5 Exercícios

1. Determine se as seguintes aplicações são lineares:
   a. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, onde $f(x,y) = (y,x)$.
   b. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, onde $f(x,y,z) = (x,y,0)$.
   c. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, onde $f(x,y,z) = (y,x,1)$.
   d. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$, onde $f(x+iy) = (x,x+y)$.
   e. $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, onde $f(x+iy, z+iw) = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$.
   f. $f : \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$, onde

$$f(a+bx+cx^2) = (a+b) + (b+c)x + (a+c)x^2 + (a+b+c)x^3.$$

   g. $f : \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$, onde $f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a+bx+cx^2+dx^3$.
   h. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde $f(x) = |x|$.
   i. $f : \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, onde $f(A) = \det A$.
   j. $f : \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, onde $f(A) = Tr(A)$, onde $Tr(A)$ é o traço de A.

2. Quais da aplicações lineares do Exercício 1 são isomorfismos?

3. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear tal que $T(1,0) = (2,1)$ e $T(0,1) = (-1,3)$.
   a. Encontre a lei de formação de T.
   b. Calcule $\mathscr{N}(T)$ e sua dimensão.
   c. Determine a inversa de T, caso possua.

4. Considere a transformação linear $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\varphi(1,0,0) = (1,1)$, $\varphi(1,1,0) = (2,0)$ e $\varphi(1,1,1) = (3,1)$.
   a. Encontre a lei de formação de φ.
   b. A aplicação φ admite inversa? Justifique.

5. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x,y,z) = (2x-3y+z, x+y-2z)$. Determine a imagem e o núcleo de T.

6. Dada a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y) = (x+2y, -3x+4y)$, determine se T é injetora, sobrejetora ou ambas.

7. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear dada por $T(x,y,z) = (x-y+z, 2x+y-z)$. Determine uma base para o núcleo de T.

8. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x,y,z) = (x+2y+z, 2x+5y+3z, -x-2y-2z).$$

   Determine a dimensão da imagem e do núcleo de T.

9. Considere a aplicação $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$f(x,y,z) = (x+2z, -x+z, x+y+2z) :$$

   a. Mostre que f é uma transformação linear.
   b. Ache o núcleo de f, dê sua base e calcule a dimensão.
   c. Ache a imagem de f, dê sua base e calcule a dimensão.
   d. A aplicação f é um isomorfismo? Justifique.

10. Considere a aplicação $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$f(x,y,z) = (x, x-y, 2x-y-z) :$$

    a. Mostre que f é uma transformação linear.
    b. Ache o núcleo e imagem de f, calcule a base e dimensão de cada um.
    c. A aplicação f é um isomorfismo? Justifique.

11. Determinar uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(\mathbb{R}^2) = [(1,1,1)]$ e $\mathscr{N}(T) = [(1,1)]$.

12. Considere a aplicação $f : \mathscr{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ dada por

$$f(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = \begin{bmatrix} -a_0 - a_1 + a_3 & -2a_1 + a_2 \\ a_2 - a_3 & 2a_3 \end{bmatrix}:$$

    a. Mostre que f é uma transformação linear.
    b. Ache o núcleo e imagem de f, apresente a base e calcule a dimensão de cada um deles.
    c. A aplicação f é um isomorfismo? Justifique.
    d. A função f admite inversa? Caso positivo, calcule f^{-1}.

13. Sejam $T, S \in \mathscr{L}(U,V)$, mostra que as aplicações $T+S$ e λT são transformações lineares.

14. Mostre que se $T_1 : U \to V$ e $T_2 : V \to W$ são transformações lineares então $T_2 \circ T_1 : U \to W$ é uma transformação linear.

15. Seja $D : \mathscr{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ definida por

$$D(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = (-a_0 - a_1 + a_3) + (-2a_1 + a_2)x + (a_2 - a_3)x^2 + 2a_3x^3.$$

    a. Mostre que D é linear.
    b. Determine uma base para o núcleo D.
    c. A aplicação D é um isomorfismo? Justifique.
    d. Calcule D^{-1}, se existir.

16. Seja $D : \mathscr{P}_4(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_4(\mathbb{R})$ uma aplicação definida por

$$D(p(t)) = \frac{d}{dt}(p(t)).$$

    a. Mostre que D é uma transformação linear.
    b. Calcule $\mathscr{N}(D)$ e $Im(D)$ e determine base e dimensão para cada um deste espaços vetoriais.

17. Seja $I : \mathscr{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_{n+1}(\mathbb{R})$ uma aplicação definida por

$$I(p(t)) = \int p(t)dt.$$

    a. Mostre que I é uma transformação linear.
    b. Calcule $\mathscr{N}(I)$ e $Im(I)$ e determine base e dimensão para cada um deste espaços vetoriais.

7. Matriz de uma transformação linear

7.1 Transformações lineares e matrizes

Sejam $\alpha = \{u_1, \cdots, u_n\}$ e $\beta = \{v_1, \cdots, v_m\}$ bases ordenadas de U e V, respectivamente. Seja $T : U \to V$ uma aplicação linear. Escrevemos $T(u_i)$, $i = 1, \cdots, n$, como combinação linear dos vetores da base de V:

$$\begin{cases} T(u_1) = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \cdots + a_{m1}v_m; \\ T(u_2) = a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{m2}v_m; \\ \vdots \\ T(u_n) = a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \cdots + a_{mn}v_m. \end{cases}$$

Definimos a matriz de T em relação às bases α e β como a transposta da matriz dos coeficientes do sistema acima, i.e.,

$$[T]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Observe que, sendo $T : U \to V$ uma transformação linear onde $\dim U = n$ e $\dim V = m$ então a matriz da transformação linear $[T]_\beta^\alpha$ é uma matriz de ordem $m \times n$. A partir deste ponto, notacionamos a matriz $[T]_\beta^\alpha$ por A. Se α e β são bases canônicas, também indicamos $[T]_\beta^\alpha$ por $[T]$.

Proposição 7.1 Sejam $\alpha = \{u_1, \cdots, u_n\}$ e $\beta = \{v_1, \cdots, v_m\}$ bases ordenadas de U e V, respectivamente, e $T : U \to V$ uma aplicação linear. Então existe uma única matriz A tal que $A = [T]_\beta^\alpha$.

Demonstração. Sejam $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ matrizes associadas à transformação linear $T : U \to V$, em relação às bases α e β de U e V, respectivamente. Então, por definição, temos que

$$T(u_j) = a_{1j}v_1 + a_{2j}v_2 + \cdots + a_{mj}v_m = b_{1j}v_1 + b_{2j}v_2 + \cdots + b_{mj}v_m, \quad j = 1, \cdots, n.$$

Isto implica que

$$(a_{1j} - b_{1j})v_1 + (a_{2j} - b_{2j})v_2 + \cdots + (a_{mj} - b_{mj})v_m = 0.$$

Como os vetores $v_1, \cdots, v_m$ são LI então $a_{ij} - b_{ij} = 0$, para cada $i = 1, \cdots, m$. Logo, $a_{ij} = b_{ij}$, com $i = 1, \cdots, m$ e $j = 1, \cdots, n$. ■

A Proposição 7.1 mostra que a aplicação $\varphi : \mathscr{L}(U,V) \to \mathbb{M}_{m\times n}$, que associa cada transformação linear a uma matriz, é bem definida. Mostramos a seguir que esta transformação é linear.

Proposição 7.2 Sejam $\alpha = \{u_1, \cdots, u_n\}$ e $\beta = \{v_1, \cdots, v_m\}$ as bases de U e V, respectivamente. A aplicação $\varphi : \mathscr{L}(U,V) \to \mathbb{M}_{m\times n}$, definida por $\varphi(T) = [T]_\beta^\alpha$ é uma transformação linear.

Demonstração. Considere $T, S \in \mathscr{L}(U,V)$ tais que $\varphi(T) = [T]_\beta^\alpha = (a_{ij})$ e $\varphi(S) = [S]_\beta^\alpha = (b_{ij})$. Assim, temos que $\varphi(T + \lambda S) = [T + \lambda S]_\beta^\alpha = (c_{ij})$, onde

$$\begin{aligned}
(T + \lambda S)(u_j) &= c_{1j}v_1 + \cdots + c_{mj}v_m \implies \\
T(u_j) + \lambda S(u_j) &= c_{1j}v_1 + \cdots + c_{mj}v_m \implies \\
(a_{1j}v_1 + \cdots + a_{mj}v_m) + \lambda(b_{1j}v_1 + \cdots + b_{mj}v_m) &= c_{1j}v_1 + \cdots + c_{mj}v_m \implies \\
(a_{1j} + \lambda b_{1j})v_1 + \cdots + (a_{mj} + \lambda b_{mj})v_m &= c_{1j}v_1 + \cdots + c_{mj}v_m,
\end{aligned}$$

para cada $j \in \{1, \cdots, n\}$. Portanto, $c_{ij} = a_{ij} + \lambda b_{ij}$, para $i \in \{1, \cdots, m\}$ e $j \in \{1, \cdots, n\}$. Logo,

$$\begin{aligned}
\varphi(T + \lambda S) &= (c_{ij}) = (a_{ij} + \lambda b_{ij}) = (a_{ij}) + \lambda(b_{ij}) \\
&= [T]_\beta^\alpha + \lambda[S]_\beta^\alpha = \varphi(T) + \lambda\varphi(S).
\end{aligned}$$

■

Proposição 7.3 Sejam U e V $\mathbb{K}$-espaços vetoriais de dimensão n e m, respectivamente. Os espaços $\mathscr{L}(U,V)$ e $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ são isomorfos.

Demonstração. Considere a aplicação linear $\varphi : \mathscr{L}(U,V) \to \mathbb{M}_{m\times n}$ e as bases α e β de U e V, respectivamente, definidas na Proposição 7.2. Começamos provando que φ é injetiva. Sendo $\varphi(T) = [T]_\beta^\alpha = (a_{ij})$ e $\varphi(S) = [S]_\beta^\alpha = (b_{ij})$ então

$$\varphi(T) = \varphi(S) \implies (a_{ij}) = (b_{ij}).$$

Portanto,

$$T(u_j) = a_{1j}v_1 + a_{2j}v_2 + \cdots + a_{mj}v_m = b_{1j}v_1 + b_{2j}v_2 + \cdots + b_{mj}v_m = S(u_j),$$

para cada $j \in \{1,\cdots,n\}$. Logo, $T = S$, pela unicidade da transformação dada pelo Teorema 6.1. Seja a matriz $(c_{ij}) \in \mathbb{M}_{m\times n}$ tal que $w_j = c_{1j}v_1 + c_{2j}v_2 + \cdots + c_{mj}v_m \in V$, $j \in \{1,\cdots,n\}$. Pelo Teorema 6.1, existe uma única transformação linear $R : U \to V$ tal que $R(u_1) = w_1, \cdots, R(u_n) = w_n$. Logo, $(c_{ij}) = [R]_\beta^\alpha$ e isto mostra que φ é sobrejetiva. Logo, $\mathscr{L}(U,V) \simeq \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. ■

Com essa proposição, o corolário a seguir é imediato.

Corolário 7.1 Sejam U e V $\mathbb{K}$-espaços vetoriais de dimensão n e m, respectivamente. Então $\dim \mathscr{L}(U,V) = mn = \dim \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.

▪ **Exemplo 7.1** Seja a transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y) = (x+y, x-y, 2x)$. Considere as base $B = \{(1,1),(1,-1)\}$ e $C = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$. Vamos calcular a transformação linear aplicada nos vetores da base B:

$$\begin{aligned} T(1,1) &= (1+1, 1-1, 2\cdot 1) = (2,0,2) \\ T(1,-1) &= (1+(-1), 1-(-1), 2\cdot 1) = (0,2,2). \end{aligned}$$

Escrevemos $T(1,1)$ e $T(1,-1)$ como combinação linear dos vetores da base C:

$$T(1,1) = (2,0,2) = a(1,0,0) + b(1,1,0) + c(1,1,1) \Rightarrow \begin{cases} a+b+c = 2 \\ b+c = 0 \\ c = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -2 \\ c = 2 \end{cases}.$$

$$T(1,-1) = (0,2,2) = a(1,0,0) + b(1,1,0) + c(1,1,1) \Rightarrow \begin{cases} a+b+c = 0 \\ b+c = 2 \\ c = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 0 \\ c = 2 \end{cases}.$$

Logo, a matriz da transformação linear S é:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

▪

▪ **Exemplo 7.2** Ainda usando a transformação T do exemplo anterior, vamos calcular agora a matriz de T em relação à base canônica do domínio e contradomínio:

$$\begin{aligned} T(1,0) &= (1,1,2) = 1(1,0,0)+1(0,1,0)+2(0,0,1) \\ T(0,1) &= (1,-1,0) = 1(1,0,0)-1(0,1,0)+0(0,0,1). \end{aligned}$$

Logo, a matriz de T em relação à base canônica é:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Note que, se tomarmos a matriz A e multiplicarmos pelas coordenadas de um vetor qualquer v em relação à base canônica, obtemos

$$Av = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ x-y \\ 2x \end{bmatrix}.$$

A matriz resultante, na base canônica, é a matriz das coordenadas da lei de

$$T(x,y) = (x+y, x-y, 2x).$$

▪

▪ **Exemplo 7.3** Determinar a matriz da transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y,z) = (x+y,z)$, em relação à base canônica.

Calculamos a transformação aplicada nos vetores da base canônica de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} T(1,0,0) &= (1,0) = 1(1,0)+0(0,1) \\ T(0,1,0) &= (1,0) = 1(1,0)+0(0,1) \\ T(0,0,1) &= (0,1) = 0(1,0)+1(0,1). \end{aligned}$$

Logo, a matriz da tranformação linear é dada por:

$$A = [T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Note que

$$(x+y,z) = (x,0)+(y,0)+(0,z) = x(1,0)+y(1,0)+z(0,1).$$

▪

▪ **Exemplo 7.4** Seja T um operador linear em $\mathbb{R}^2$ definido por $T(x,y) = (2x-y, x+3y)$. Ache a matriz de T em relação a base canônica. Faça o mesmo para $S(x,y) = (x-y, x+y)$. Após isso calcule $S \circ T$ e $T \circ S$.

Para encontrar a matriz de T, temos

$$\begin{aligned} T(1,0) &= (2,1) \\ T(0,1) &= (-1,3). \end{aligned}$$

Temos daí que a matriz de T é

$$[T] = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Do mesmo modo, para a transformação S, temos a matriz

$$[S] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Temos que $[S \circ T] = [S][T]$ (mostramos isso na próxima seção), daí

$$[S \circ T] = [S][T] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Como estamos dentro do ambiente da base canônica, segue que a lei de $S \circ T$ pode ser dada por

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-4y \\ 3x+2y \end{bmatrix}.$$

Logo, $S \circ T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é definida por $(S \circ T)(x,y) = (x-4y, 3x+2y)$.
Agora, calculamos a $T \circ S$:

$$[T \circ S] = [T][S] = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Temos, entao que $T \circ S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é definida por $(T \circ S)(x,y) = (x-3y, 4x+2y)$.
Calculando a composta $T \circ S$ de outra maneira:

$$\begin{aligned} T \circ S(x,y) &= T(S(x,y)) \\ &= T(x-y, x+y) \\ &= (2(x-y)-(x+y), x-y+3(x+y)) \\ &= (2x-2y-x-y, x-y+3x+3y) \\ &= (x-3y, 4x+2y). \end{aligned}$$

▪

▪ **Exemplo 7.5** Seja a transformação $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ com matriz em relação às bases B e C:

$$[T]_C^B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

onde $B = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ e $C = \{(1,0),(1,1)\}$. Encontre a lei da transformação T.

Vamos achar as coordenadas do vetor $v = (x,y,z)$ em relação à base B:

$$(x,y,z) = a(1,0,0)+b(1,1,0)+c(1,1,1) \Rightarrow \begin{cases} a+b+c = x \\ b+c = y \\ c = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = x-y \\ b = y-z \\ c = z \end{cases}.$$

Portanto, as coordenadas do vetor v em relação à base B são dadas pela matriz

$$[v]_B = \begin{bmatrix} x-y \\ y-z \\ z \end{bmatrix}.$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} [T]_C^B[v]_B &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-y \\ y-z \\ z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2(x-y)+y-z \\ -(x-y)+2(y-z)+z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2x-y-z \\ -x+3y-z \end{bmatrix} = [T(v)]_C. \end{aligned}$$

Agora, escrevemos as coordenadas do vetor resultante acima em relação à base C. Isto significa que

$$\begin{aligned} (2x-y-z)(1,0)+(-x+3y-z)(1,1) &= (2x-y-z,0)+(-x+3y-z,-x+3y-z) \\ &= (x+2y-2z,-x+3y-z). \end{aligned}$$

Logo, $T(x,y,z) = (x+2y-2z,-x+3y-z)$. ∎

7.2 O isomorfismo entre $\mathscr{L}(U,V)$ e $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$

Sejam U e V $\mathbb{K}$-espaços vetoriais de dimensões n e m, respectivamente. Já mostramos que o espaço de todas as transformações lineares $\mathscr{L}(U,V)$ é isomorfo ao espaço das matrizes $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Portanto, existe uma isomorfismo linear $\varphi : \mathscr{L}(U,V) \to M_{m\times n}(\mathbb{K})$, com $\varphi(T) = A_{m\times n}$.

Proposição 7.4 Sejam U,V e W espaços vetoriais de dimensão finita com bases α, β e γ, respectivamente. Se $T \in \mathscr{L}(U,V)$, $S \in \mathscr{L}(V,W)$ então $S\circ T \in \mathscr{L}(U,W)$ e

$$[S\circ T]_\gamma^\alpha = [S]_\gamma^\beta [T]_\beta^\alpha.$$

Demonstração. Sejam $\alpha = \{u_1, \cdots, u_n\}$, $\beta = \{v_1, \cdots, v_m\}$ e $\gamma = \{w_1, \cdots, w_p\}$ as base de U, V e W, respectivamente. Então, pela definição de matrizes de uma transformação linear, temos,

$$\begin{aligned} T(u_j) &= a_{1j}v_1 + \cdots + a_{mj}v_m = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}v_i \\ S(v_i) &= b_{1i}w_1 + \cdots + b_{pi}w_p = \sum_{k=1}^{p} b_{ki}w_k, \end{aligned}$$

onde $(a_{ij})_{m\times n} = [T]_\beta^\alpha$ e $(b_{ki})_{p\times m} = [S]_\gamma^\beta$, $i = 1, \cdots, m$, $j = 1, \cdots, n$ e $k = 1, \cdots, p$. Portanto,

$$\begin{aligned} S\circ T(u_j) &= S(T(u_j)) \\ &= S\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}v_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{m} a_{ij}S(v_i) \\ &= \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\sum_{k=1}^{p} b_{ki}w_k \\ &= \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{m} b_{ki}a_{ij}\right)w_k. \end{aligned}$$

Logo,

$$[S\circ T]_\gamma^\alpha = \left(\sum_{i=1}^{m} b_{ki}a_{ij}\right)_{p\times n} = [S]_\gamma^\beta [T]_\beta^\alpha.$$

■

Desta forma, as regras operacionais da composição de transformações lineares se transferem diretamente para o produto de matrizes e vice-versa. Ora, já desconfiávamos que isso aconteceria por causa do isomorfismo entre os espaços $\mathscr{L}(U,V)$ e $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Por exemplo, sabe-se que no espaço das matrizes, além das propriedades de espaço vetorial, vale a distributividade do produto à esquerda e à direita. Isto é, vale que

$$(A+B)C = AC + BC,$$

onde $A, B \in \mathbb{M}_{m\times p}$ e $C \in \mathbb{M}_{p\times n}$, e também que

$$C(A+B) = CA + CB,$$

onde $A, B \in \mathbb{M}_{p\times m}$ e $C \in \mathbb{M}_{n\times p}$. Pelo isomorfismo entre os espaços, podemos inferir que o mesmo vale para as transformações lineares associadas a A, B e C:

$$(T_A + T_B)\circ T_C = T_A \circ T_C + T_B \circ T_C.$$

A proposição a seguir nos ajuda a determinar a matriz da inversa de uma transformação, caso exista.

Proposição 7.5 Sejam U e V espaços vetoriais de mesma dimensão com bases α e β, respectivamente. Se $T \in \mathscr{L}(U,V)$ possui inversa T^{-1} então $\left([T]_\beta^\alpha\right)^{-1} = [T^{-1}]_\alpha^\beta$ (lê-se: "a inversa da matriz de T é igual à matriz da inversa de T").

Demonstração. Seja $n = \dim U = \dim V$. Multiplicando as matrizes $[T]_\beta^\alpha$ e $[T^{-1}]_\alpha^\beta$ e usando a Proposição 7.4, temos

$$[T]_\beta^\alpha [T^{-1}]_\alpha^\beta = [T \circ T^{-1}]_\beta^\beta = [I]_\beta^\beta = I_n.$$

Por outro lado,

$$[T^{-1}]_\alpha^\beta [T]_\beta^\alpha = [T^{-1} \circ T]_\alpha^\alpha = [I]_\alpha^\alpha = I_n.$$

Logo, $\left([T]_\beta^\alpha\right)^{-1} = [T^{-1}]_\alpha^\beta$. ■

Proposição 7.6 Sejam α e β bases de um espaço vetorial V de dimensão finita e $I \in \mathscr{L}(V)$ a transformação identidade. Então a matriz da transformação identidade $[I]_\beta^\alpha$ é a matriz mudança de base de α para β.

Demonstração. Segue imediatamente da definição da matriz da transformação. Sejam $\alpha = \{u_1, \cdots, u_n\}$ e $\beta = \{v_1, \cdots, v_n\}$ bases de V, então

$$\begin{aligned} u_1 = \quad & I(u_1) \quad = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \cdots + a_{n1}v_n \\ u_2 = \quad & I(u_2) \quad = a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{n2}v_n \\ & \vdots \\ u_n = \quad & I(u_n) \quad = a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \cdots + a_{nn}v_n, \end{aligned}$$

cuja matriz associada é

$$[I]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

que é, exatamente, a definição da matriz mudança de base de α para β. ■

Proposição 7.7 Sejam α e β bases de um espaço vetorial V de dimensão finita. Então

$$[T]_\beta^\beta = [I]_\beta^\alpha [T]_\alpha^\alpha [I]_\alpha^\beta,$$

onde $[I]_\beta^\alpha$ é a matriz mudança de base de α para β.

Demonstração. Usando a Proposição 7.4, temos

$$[I]_\beta^\alpha [T]_\alpha^\alpha [I]_\alpha^\beta = [I]_\beta^\alpha [T\circ I]_\alpha^\beta = [I]_\beta^\alpha [T]_\alpha^\beta = [I\circ T]_\beta^\beta = [T]_\beta^\beta.$$

■

Da mesma forma, o espaço $\mathscr{L}(U,V)$ "herda" todas as propriedades e até algumas nomenclaturas das matrizes.

A proposição a seguir é uma generalização da Proposição 7.7 e tem demonstração análoga.

Proposição 7.8 Sejam α e β bases de um espaço vetorial V de dimensão finita. Então

$$[T]_\beta^\alpha = [I]_\beta^\alpha [T]_\alpha^\beta [I]_\beta^\alpha,$$

onde $[I]_\beta^\alpha$ é a matriz mudança de base de α para β.

▪ **Exemplo 7.6** Seja $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ uma transformação linear, cuja matriz em relação à base $\alpha=\{(1,1),(1,-1)\}$ é

$$[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Achar a matriz de T em relação à base canônica.

Seja β a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Calculamos $[I]_\beta^\alpha$:

$$\begin{aligned} (1,1) &= 1(1,0)+1(0,1), \\ (1,-1) &= 1(1,0)-1(0,1). \end{aligned}$$

Portanto,

$$[I]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Calculamos $[I]_\alpha^\beta$:

$$\begin{aligned} (1,0) &= \frac{1}{2}(1,1)+\frac{1}{2}(1,-1), \\ (0,1) &= \frac{1}{2}(1,1)-\frac{1}{2}(1,-1). \end{aligned}$$

Portanto,

$$[I]_\alpha^\beta = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Portanto, a matriz de T na base canônica β é a matriz

$$\begin{aligned}[T]_{\beta}^{\beta} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

■

7.3 Transformações nilpotentes

É toda transformação $T \in \mathscr{L}(V)$ tal que $T^k = 0$ para algum $k \in \mathbb{N}$. O menor valor k que satisfaz tal condição é chamada de índice ou grau de T.

■ **Exemplo 7.7** Mostre que a transformação $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y,z) = (y,z,0)$ é nilpotente. Ache o índice de T.

Considerando a base canônica, temos que a matriz de T é dada por

$$A = [T] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(Note que $(y,z,0) = y(0,1,0) + z(0,0,1)$). Temos daí que

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq 0.$$

E ainda,

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, a transformação T é nilpotente com índice de nilpotência 3. ■

7.4 Transformações idempotentes

É toda transformação $T \in \mathscr{L}(V)$ tal que $T^2 = T$.

■ **Exemplo 7.8** A transformação linear $T(x,y,z) = (2x-y+z, -3x+4y-3z, -5x+5y-4z)$ é idempotente?

A matriz de T em relação à base canônica é

$$A = [T] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -5 & 5 & -4 \end{bmatrix}.$$

Agora, basta calcular A^2,

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -5 & 5 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -5 & 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -5 & 5 & -4 \end{bmatrix} = A.$$

Logo, a transformação T é idempotente. ∎

7.5 Transformações involutivas

É toda transformação $T \in \mathscr{L}(V)$ tal que $T^2 = I$.

∎ **Exemplo 7.9** A transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y) = (x-y,-y)$ é uma involução.

De fato, a matriz de T, em relação à base canônica é,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

∎

7.6 Posto e nulidade de uma transformação linear

Seja $T \in \mathscr{L}(U,V)$. O *posto* de T é definido como a dimensão da imagem T. A *nulidade* é a dimensão do núcleo de T. Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem temos que a soma do posto com a nulidade é igual à dimensão de U.

Em termos matriciais, o posto de uma matriz A é o número máximo de linhas (ou colunas) LI (não nulas após escalonamento) e a nulidade é igual ao número de colunas da matriz menos o posto. As notações comumente usadas para posto são $posto(A)$, $rank(A)$, $rk(A)$ e $\rho(A)$.

Proposição 7.9 Sejam U e V $\mathbb{K}$-espaços vetoriais de dimensão n e m, respectivamente. Considere a matriz $A_{m\times n}$ da transformação linear $T \in \mathscr{L}(U,V)$. Então

(i) $rank(A) \leq \min\{m,n\}$.
(ii) T é injetiva se, e somente se, $rank(A) = n$ (diz-se, neste caso, que o posto é maximal).
(iii) T é sobrejetiva se, e somente se, $rank(A) = m$.

Demonstração. (i) Suponha $m \leq n$. Uma vez que $\dim Im(T) \leq \dim V$ então $rank(A) \leq m \leq n$. Por outro lado, se $n \leq m$ então pelo Teorema do Núcleo e da Imagem temos que

$$n = \dim \mathscr{N}(T) + rank(A) \implies rank(A) \leq n.$$

De todo modo, $rank(A) \leq \min\{m,n\}$.

(ii) Se T é injetiva então o núcleo de T é trivial. Portanto, a dimensão do núcleo é nula. Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, temos que $\dim U = \dim Im(T)$. Logo, $n = \dim Im(T) = rank(A)$. Faça a recíproca como exercício.

(iii) Imediato, pois

$$T \text{ sobrejetiva } \iff \dim Im(T) = \dim V \iff rank(A) = m.$$

■

▪ **Exemplo 7.10** Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$, definida por

$$T(a,b,c,d) = (a-b) + (c+d)t + (a+b+c)t^2 + (2b-c)t^3.$$

Calculemos o posto e nulidade de T. Inicialmente, calculamos a matriz de T em relação às bases canônicas de $\mathbb{R}^4$ e $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$. Temos,

$$\begin{aligned} T(1,0,0,0) = 1+t^2 &= 1+0t+t^2+0t^3; \\ T(0,1,0,0) = -1+t^2+2t^3 &= -1+0t+t^2+2t^3; \\ T(0,0,1,0) = t+t^2-t^3 &= 0+t+t^2-t^3; \\ T(0,0,0,1) = t &= 0+t+0t^2+0t^3. \end{aligned}$$

Portanto, a matriz de T em relação às bases canônicas de $\mathbb{R}^4$ e $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ é

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calculamos o posto e nulidade de A:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} L_3 \to L_3 - L_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} L_2 \leftrightarrow L_3 \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} L_2 \to \frac{1}{2}L_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} L_1 \to L_2 + L_1 \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} L_4 \to -2L_2 + L_4 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} L_1 \to -\frac{1}{2}L_3 + L_1 \\ L_2 \to -\frac{1}{2}L_3 + L_2 \\ L_4 \to 2L_3 + L_4 \end{array} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} L_4 \to \frac{1}{2}L_4 \\ L_1 \to \frac{1}{2}L_4 + L_1 \\ L_2 \to \frac{1}{2}L_4 + L_2 \\ L_3 \to -L_4 + L_3 \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo, a matriz A tem 4 linhas LI. Portanto, o posto de A é igual a 4. Como a nulidade é a diferença entre a quantidade de colunas da matriz de T e o posto, segue que a nulidade é igual a zero. Como a nulidade é zero, segue que o núcleo da tranformação T é trivial. Como $rank(A) = 4 = \dim Im(T)$. Uma vez que $\dim \mathscr{P}_3(\mathbb{R}) = 4$ segue que $\mathscr{P}_3(\mathbb{R}) = Im(T)$. Logo, a transformação T é um isomorfismo. ∎

7.7 Exercícios

1. Dada a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x,y) = (3x-2y,-4x+y)$, determine a matriz de T em relação à base canônica de $\mathbb{R}^2$.

2. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear tal que $T(1,0) = (2,1)$ e $T(0,1) = (-1,3)$. Determine a matriz de T em relação à base canônica de $\mathbb{R}^2$.

3. Considere a aplicação $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$f(x,y,z) = (x, x-y, 2x-y-z) :$$

   a. Sejam

$$\alpha = \{(1,0,-1),(0,1,-1),(1,1,0)\} \text{ e } \beta = \{(0,0,1),(0,1,2),(1,2,3)\}$$

   bases de $\mathbb{R}^3$, encontre $[f]^{\alpha}_{\beta}$.
   b. Encontre a matriz de f em relação à base canônica.
   c. Calcule o posto e a nulidade de f.
   d. Encontre o isomorfismo inverso de f.

4. Considere a aplicação $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$f(x,y,z) = (x+2z, -x+z, x+y+2z) :$$

   a. Sejam

$$\alpha = \{(1,0,-1),(0,1,-1),(1,1,0)\} \text{ e } \beta = \{(0,0,1),(0,1,2),(1,2,3)\}$$

   bases de $\mathbb{R}^3$, encontre $[f]^{\alpha}_{\beta}$.
   b. Sendo γ a base canônica de $\mathbb{R}^3$, encontre $[f]^{\gamma}_{\gamma}$.
   c. Calcule o posto e a nulidade de f.

5. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear cuja matriz em relação à base $\beta = \{(1,0),(1,4)\}$ é $[T]_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$. Determine a matriz de T em relação à base canônica de $\mathbb{R}^2$.

6. Considere o espaço vetorial das matrizes de ordem 2 com base

$$\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

   Seja $T : \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ definida como $T\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \right) = (x+y, z+w)$.

a. Ache $[T]_{\gamma}^{\beta}$, onde γ é a base canônica de $\mathbb{R}^2$.

b. Calcule $S:\mathbb{R}^2\to\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ tal que $[S]_{\beta}^{\gamma}=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\\-1&1\\1&0\end{bmatrix}$.

c. Verifique se é possível encontrar um vetor (x,y) tal que $S(x,y)=I_2$, onde I_2 é a matriz identidade de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$.

d. Calcule o posto e a nulidade de T e de S.

7. Os espaços vetoriais $U=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; x-y-z=0\}$ e

$$V=\left\{\begin{bmatrix}x&y\\x+y&x-y\end{bmatrix}; x,y\in\mathbb{R}\right\}$$

são isomorfos? Justifique.

8. Sejam T_A e T_B transformações lineares cujas respectivas matrizes são:

$$A=\begin{bmatrix}1&0\\2&-1\\0&1\end{bmatrix} \text{ e } B=\begin{bmatrix}0&1&-1\\1&2&0\\-1&0&1\end{bmatrix}.$$

Determine:

a. $\mathcal{N}(T_A)$ e $Im(T_A)$.

b. $\mathcal{N}(T_B)$ e $Im(T_B)$.

c. $\mathcal{N}(T_B\circ T_A)$ e $Im(T_B\circ T_A)$.

9. Sejam V espaço vetorial e $T:V\to V$ um operador linear idempotente. Mostre que $V=\mathcal{N}(T)\oplus T(V)$. Exiba um exemplo que ilustra esse resultado.

10. Mostre que $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ dada por $f(x,y)=(2x-y,4x-2y)$ é nilpotente.

11. Considere a aplicação $f:\mathbb{P}_3(\mathbb{R})\to\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ dada por

$$f(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3)=\begin{bmatrix}-a_0-a_1+a_3&-2a_1+a_2\\a_2-a_3&2a_3\end{bmatrix}.$$

Sendo α a base canônica de $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ e β a base canônica de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, encontre $[f]_{\beta}^{\alpha}$.

12. Seja $D:\mathbb{P}_3\to\mathbb{P}_3$ definida por

$$D(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3)=(-a_0-a_1+a_3)+(-2a_1+a_2)x+(a_2-a_3)x^2+2a_3x^3.$$

Sendo γ a base canônica de $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ encontre $[D]_{\gamma}^{\gamma}$.

13. Seja $T:\mathbb{M}_2(\mathbb{R})\to\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ o operador linear definido por

$$T(X)=\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}X+X\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}.$$

a. Determine o posto e a nulidade de T.
b. T é um automorfismo? Justifique.

14. Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita. Mostre que toda involução $T \in \mathscr{L}(V)$ é um isomorfismo.

8. Autovalores e Autovetores

Definição 8.1 Seja V um espaço vetorial de dimensão n e $T : V \to V$ um operador linear. Dizemos que v é um *autovetor* de T se existir $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $T(v) = \lambda v$. O escalar λ é chamado de *autovalor* de T.

Seja $A = [T]$ a matriz de T em relação à base canônica. Considere $v \in V$ não nulo um autovetor de A. Então,

$$Av = \lambda v \Rightarrow Av - \lambda v = 0 \Rightarrow Av - \lambda Iv = 0 \Rightarrow (A - \lambda I)v = 0, \text{ pois } Iv = v,$$

onde I é a matriz identidade de ordem n. Se $\det(A - \lambda I) \neq 0$ então $v = 0$ é o único vetor que satisfaz a equação acima. Como estamos supondo $v \neq 0$, deve-se ter que $\det(A - \lambda I) = 0$.

De um modo geral, sendo X uma matriz cujo $\det X \neq 0$ então $v = 0$, pois

$$Xv = 0 \Rightarrow X^{-1}Xv = X^{-1}0 \Rightarrow v = 0$$

O que acabamos de ver pode ser resumido na seguinte frase: "Se v é um autovetor de A associado a um autovalor λ então $\det(A - \lambda I) = 0$".

▪ **Exemplo 8.1** Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y) = (x-y, x+y)$. Vamos encontrar um autovetor de T. Pela definição, $v = (x,y)$ é autovetor de T se $T(v) = \lambda v$. Então,

$$T(v) = \lambda v \iff (x-y, x+y) = \lambda(x,y) \iff \begin{cases} x - y = \lambda x \\ x + y = \lambda y \end{cases} \iff \begin{cases} (1-\lambda)x - y = 0 \\ x + (1-\lambda)y = 0 \end{cases}$$

Vamos resolver este sistema para λ, temos daí a matriz dos coeficientes:

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A - \lambda I$$

cujo determinante é $(1-\lambda)^2+1$. Queremos encontrar os valores de λ para os quais o determinante da matriz dos coeficientes é zero. Temos, portanto, que

$$(1-\lambda)^2+1=0 \Rightarrow 1-2\lambda+\lambda^2+1=0 \Rightarrow \lambda^2-2\lambda+2=0.$$

Como a equação acima não tem zeros reais, então T não tem autovetores reais. ∎

∎ **Exemplo 8.2** Considere $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y)=(2x+y,x+2y)$. Encontremos os autovalores λ de T. A matriz de T em relação à base canônica é

$$A=[T]=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}.$$

Assim, os autovalores de T são tais que $\det(A-\lambda I)=0$. Portanto, a matriz $A-\lambda I$ é tal que

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}2-\lambda&1\\1&2-\lambda\end{vmatrix}=0 &\implies (2-\lambda)^2-1=0\\ &\implies 4-4\lambda+\lambda^2-1=0\\ &\implies \lambda^2-4\lambda+3=0,\end{aligned}$$

cujos zeros são $\lambda_1=1$ e $\lambda_2=3$. Temos, daí, dois autovalores $\lambda_1=1$ e $\lambda_2=3$. Encontremos os seus autovetores associados.
Para $\lambda_1=1$, os autovetores v associados a λ_1 são tais que $(A-\lambda_1 I)v=0$. Portanto,

$$\begin{aligned}(A-\lambda_1 I)v=0 &\implies \begin{bmatrix}2-\lambda_1&1\\1&2-\lambda_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\\ &\implies \begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\\ &\implies x+y=0.\end{aligned}$$

Desta forma, os autovetores $v=(x,y)$ são tais que $y=-x$. Um autovetor associado a λ_1 é o vetor $v_1=(1,-1)$.
Para $\lambda_2=3$, os autovetores v associados a λ_2 são tais que $(A-\lambda_2 I)v=0$. Portanto,

$$\begin{aligned}(A-\lambda_2 I)v=0 &\implies \begin{bmatrix}2-\lambda_2&1\\1&2-\lambda_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\\ &\implies \begin{bmatrix}-1&1\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\\ &\implies x-y=0.\end{aligned}$$

Assim, os autovetores $v=(x,y)$ são tais que $y=x$. Um autovetor associado a λ_2 é o vetor $v_2=(1,1)$. ∎

Definição 8.2 Sejam V um espaço vetorial de dimensão n e A a matriz da transformação $T : V \to V$ um operador linear em relação a uma base β. Se v é um autovetor de A associado a um autovalor λ então definimos o conjunto

$$V_\lambda = \{v \in V; Av = \lambda v\},$$

como o autoespaço de A em relação ao autovalor λ.

Note que V_λ é um subespaço vetorial de V. De fato, sejam $u, v \in V_\lambda$ e $k \in \mathbb{K}$. Então

$$T(u+kv) = T(u) + kT(v) = \lambda u + k(\lambda v) = \lambda(u+kv).$$

Logo, $u + kv \in V_\lambda$.

A proposição a seguir mostra que dois autoespaços, associados a autovalores distintos, são disjuntos.

Proposição 8.1 Sejam λ_1 e λ_2 autovalores distintos de um operador linear $T : V \to V$. Então $V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2} = \{0\}$.

Demonstração. Basta observar que se $V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2} \neq \{0\}$, o operador T não estaria bem definido uma vez que existiria $v \neq 0$ tal que $T(v) = \lambda_1 v$ e $T(v) = \lambda_2 v$. ■

▪ **Exemplo 8.3** Em relação ao Exemplo 8.2, temos os seguintes autoespaços:

$$\begin{aligned} V_{\lambda_1} &= V_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x\}, \\ V_{\lambda_2} &= V_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}. \end{aligned}$$

Não é difícil verificar que $V_1 = [(1,-1)]$ e $V_3 = [(1,1)]$. Além disso, observe que

$$V_1 \cap V_3 = \{(0,0)\}.$$

▪

8.1 Polinômio característico

Definição 8.3 Sejam V um espaço vetorial de dimensão n e β uma base de V. Seja $T : V \to V$ um operador linear cuja matriz em relação à base β é representada por A. O polinômio $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ é chamado de *polinômio característico* da matriz A.

Note que os zeros do polinômio característico são os autovalores de A.

▪ **Exemplo 8.4** Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear definido por $T(x,y) = (x+y, x-y)$. Vamos encontrar os autovalores e autovetores de T.

Passo 1. Encontre a matriz de T em relação à base canônica de $\mathbb{R}^2$. Temos que

$$\begin{aligned} T(1,0) &= (1,1) = 1(1,0)+1(0,1), \\ T(0,1) &= (1,-1) = 1(1,0)-1(0,1). \end{aligned}$$

Portanto, a matriz de T é

$$A = [T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Passo 2. Calcule o polinômio característico.
O polinômio característico é dado por $p_A(\lambda) = \det(A-\lambda I)$:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A-\lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (1-\lambda)(-1-\lambda)-1 \\ &= -(1-\lambda^2)-1 \\ &= \lambda^2-2. \end{aligned}$$

Passo 3. Encontrar os zeros do polinômio característico. Esses zeros serão os autovalores de T.
Façamos $p_A(\lambda) = 0$. Daí,

$$\lambda^2-2=0 \Rightarrow \lambda^2 = 2 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{2}.$$

Assim, $\lambda_1 = -\sqrt{2}$ e $\lambda_2 = \sqrt{2}$ são os autovalores de T.

Passo 4. Substituimos os autovalores encontrados na expressão $(A-\lambda I)v = 0$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

para encontrar os autovetores.
Para $\lambda_1 = -\sqrt{2}$ temos

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1-(-\sqrt{2}) & 1 \\ 1 & -1-(-\sqrt{2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1+\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} (1+\sqrt{2})x+y \\ x+(-1+\sqrt{2})y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Temos daí um sistema de equações

$$\begin{cases} (1+\sqrt{2})x+y=0 \\ x+(-1+\sqrt{2})y=0 \end{cases}.$$

Da equação 1, temos $y = -(1+\sqrt{2})x$. Substituindo y na equação 2, temos

$$\begin{aligned} x+(-1+\sqrt{2})y=0 &\Rightarrow x-(-1+\sqrt{2})(1+\sqrt{2})x=0 \\ &\Rightarrow x-x=0. \end{aligned}$$

Temos um sistema indeterminado. Portanto, $y = -(1+\sqrt{2})x$. Logo, os autovetores de T em relação ao autovalor λ_1 são da forma $(x,-(1+\sqrt{2})x)$. O conjunto formado por todos os autovetores relacionados ao autovalor λ_1 forma um espaço vetorial chamado de *autoespaço*, cuja notação é

$$V_{\lambda_1} = V_{-\sqrt{2}} = \{(x,-(1+\sqrt{2})x) : x \in \mathbb{R}\} = [(1,-(1+\sqrt{2}))].$$

Para $\lambda_2 = \sqrt{2}$, temos:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1-\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1-\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} (1-\sqrt{2})x+y \\ x-(1+\sqrt{2})y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Temos daí o sistema de equações

$$\begin{cases} (1-\sqrt{2})x+y=0 \\ x-(1+\sqrt{2})y=0 \end{cases},$$

que é indeterminado com $y = -(1-\sqrt{2})x$. Portanto, o autoespaço associado a λ_2 é definido por todos os vetores da forma $(x,-(1-\sqrt{2})x)$. Assim,

$$V_{\lambda_2} = V_{\sqrt{2}} = \{(x,-(1-\sqrt{2})x) : x \in \mathbb{R}\} = [(1,-(1-\sqrt{2}))].$$

■

O resultado a seguir, mostra que o polinômio característico independe da base do espaço vetorial V.

Proposição 8.2 Sejam α e β bases de um espaço vetorial V de dimensão finita. Sejam $A = [T]_\alpha^\alpha$ e $B = [T]_\beta^\beta$ as matrizes de T em relação às bases α e β, respectivamente. Então

$$p_A(\lambda) = p_B(\lambda).$$

Demonstração. Pela Proposição 7.4, temos que A e B são matrizes semelhantes, uma vez que

$$A = M^{-1}BM,$$

onde $M = [I]_\beta^\alpha$. Portanto,

$$A-\lambda I = M^{-1}BM - \lambda I = M^{-1}BM - \lambda M^{-1}IM = M^{-1}(B-\lambda I)M$$

Assim, $\det(A-\lambda I) = \det(B-\lambda I)$. E isso implica que, $p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$.

■

8.1.1 O Teorema de Cayley-Hamilton

Nesta subseção, enunciamos e provamos o teorema de Cayley-Hamilton. Antes, porém, definimos polinômio anulador de uma matriz e exibimos um exemplo que nos ajuda a entender melhor a demonstração do teorema.

Definição 8.4 Sejam $p(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$ um polinômio e A uma matriz quadrada. Definimos $p(A)$ como a matriz

$$p(A) = a_nA^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1A + a_0I.$$

Quando $p(A) = 0$ diz-se que o polinômio p anula a matriz A. O polinômio $p(\lambda)$ é chamado de *mônico* se $a_n = 1$.

▪ **Exemplo 8.5** Considere o operador linear definido pela matriz A abaixo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \Longrightarrow A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 2-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico de A é $p_A(\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)$. Calculamos a matriz adjunta de $A - \lambda I$, para isso precisamos dos cofatores de $A - \lambda I$:

$$M_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 6 - 5\lambda + \lambda^2, \quad M_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$M_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 2-\lambda \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \qquad M_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 6 - 2\lambda,$$

$$M_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 3 - 4\lambda + \lambda^2, \quad M_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$M_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2-\lambda & 3 \end{vmatrix} = 3\lambda, \qquad M_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 3\lambda,$$

$$M_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 2 - 3\lambda + \lambda^2.$$

Desta forma, a matriz dos cofatores de $A - \lambda I$ é dada por

$$\begin{bmatrix} 6-5\lambda+\lambda^2 & 0 & 0 \\ -6+2\lambda & 3-4\lambda+\lambda^2 & 0 \\ 3\lambda & -3+3\lambda & 2-3\lambda+\lambda^2 \end{bmatrix}.$$

Como a matriz adjunta de $A - \lambda I$ é a transposta da matriz dos cofatores, temos que

$$B = \text{Adj}(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 6-5\lambda+\lambda^2 & -6+2\lambda & 3\lambda \\ 0 & 3-4\lambda+\lambda^2 & -3+3\lambda \\ 0 & 0 & 2-3\lambda+\lambda^2 \end{bmatrix}.$$

Agora escrevemos a matriz B como um polinômio, na variável λ, com coeficientes matriciais, como segue

$$\begin{aligned}
B &= \begin{bmatrix} 6-5\lambda+\lambda^2 & -6+2\lambda & 3\lambda \\ 0 & 3-4\lambda+\lambda^2 & -3+3\lambda \\ 0 & 0 & 2-3\lambda+\lambda^2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 6 & -6 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5\lambda & 2\lambda & 3\lambda \\ 0 & -4\lambda & 3\lambda \\ 0 & 0 & -3\lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 6 & -6 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\lambda^2 \\
&= B_0 + B_1\lambda + B_2\lambda^2.
\end{aligned}$$

A partir daí, não é difícil verificar que $(A-\lambda I_n)\cdot \mathrm{Adj}(A-\lambda I_n) = \det(A-\lambda I)I_n = p_A(\lambda)I$. Calculamos $p_A(A)$. Como $p_A(\lambda) = 6-11\lambda+6\lambda^2-\lambda^3$ então

$$\begin{aligned}
p_A(A) &= 6I - 11A + 6A^2 - A^3 \\
&= 6\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 11\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} + 6\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^2 - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^3 \\
&= 6\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 11\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} + 6\begin{bmatrix} 1 & 6 & 18 \\ 0 & 4 & 15 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 14 & 75 \\ 0 & 8 & 57 \\ 0 & 0 & 27 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 11 & 22 & 33 \\ 0 & 22 & 33 \\ 0 & 0 & 33 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 36 & 108 \\ 0 & 24 & 60 \\ 0 & 0 & 54 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 14 & 75 \\ 0 & 8 & 57 \\ 0 & 0 & 27 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Logo, o polinômio característico $p_A(\lambda)$ anula a matriz A. Esse é um fato interessante para a matriz A do exemplo. Mas será que é um fato geral? Em outras palavras, sendo $p_A(\lambda)$ o polinômio característico de uma matriz qualquer A, é sempre verdade que $p_A(\lambda)$ anula a matriz A? A resposta é positiva e podemos ver a demonstração disso no teorema a seguir. ∎

Teorema 8.1 — Cayley-Hamilton. Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita e A a matriz do operador linear $T : V \to V$. Se $p(\lambda)$ é o polinômio característico da matriz A do operador T então $p(A) = 0$.

Demonstração. Seja $n = \dim V$. Escrevemos o polinômio característico da matriz A como $p(\lambda) = \det(A-\lambda I) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_n\lambda^n$. Considere a matriz adjunta de $A-\lambda I$, definida

por $B = (b_{ij}) = \text{Adj}(A - \lambda I)$. Note que, pela definição de matriz adjunta, cada b_{ij} é um polinômio de grau no máximo $n-1$ na variável λ. Portanto,

$$b_{ij} = b_{ij}^{(0)} + b_{ij}^{(1)}\lambda + \cdots + b_{ij}^{(n-1)}\lambda^{n-1}.$$

Desta forma, podemos escrever B como

$$B = B_0 + B_1\lambda + \cdots + B_{n-1}\lambda^{n-1},$$

sendo B_k matrizes constantes, independentes de λ, com $k \in \{0, \cdots, n-1\}$. Como

$$(A - \lambda I) \cdot \text{Adj}(A - \lambda I) = \det(A - \lambda I) I_n,$$

temos

$$\begin{aligned}
(A - \lambda I) \cdot B &= (a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_n\lambda^n) I_n \\
(A - \lambda I) \cdot (B_0 + B_1\lambda + \cdots + B_{n-1}\lambda^{n-1}) &= (a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_n\lambda^n) I_n \\
AB_0 + (AB_1 - B_0)\lambda + \cdots + (AB_{n-1} - B_{n-1})\lambda^{n-2} - B_{n-1}\lambda^n &= a_0 I_n + a_1\lambda I_n + \cdots + a_n\lambda^n I_n.
\end{aligned}$$

Comparando ambos os lados, temos

$$\begin{cases}
a_0 I_n & = AB_0 \\
a_1 I_n & = AB_1 - B_0 \\
 & \vdots \\
a_{n-1} I_{n-1} & = AB_{n-1} - B_{n-2} \\
a_n I_n & = -B_{n-1}.
\end{cases}$$

Multiplicando essas equações por $I, A, A^2, \cdots, A^n$, temos

$$\begin{cases}
a_0 I_n & = AB_0 \\
a_1 A & = A^2 B_1 - AB_0 \\
 & \vdots \\
a_{n-1} A^{n-1} & = A^n B_{n-1} - A^{n-1} B_{n-2} \\
a_n A^n & = -A^n B_{n-1}.
\end{cases}$$

Assim, adicionando membro a membro todas as equaçõea acima, temos

$$a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_n A^n = AB_0 + (A^2 B_1 - AB_0) + \cdots + A^n B_{n-1} - A^{n-1} B_{n-2} - A^n B_{n-1}.$$

Logo, $p(A) = 0$. ■

Além da demonstração que exibimos acima para o teorema de Cayley-Hamilton, existem demonstrações que usam argumentos elementares, outra que usa o Teorema Fundamental da Álgebra e até uma demonstração que usa a fórmula integral de Cauchy. Recomendamos aos leitores e alunos interessados que estudem essas demonstrações.

8.2 Multiplicidades algébrica e geométrica

Considere V um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \to V$ um operador linear.

Definição 8.5 — Multiplicidade geométrica. Seja λ um autovalor de um operador linear T. A *multiplicidade geométrica* de λ é igual à dimensão do autoespaço associado a este autovalor. Denotamos a multiplicidade geométrica de λ por $m_g(\lambda)$.

Sabe-se que é possível encontrar o polinômio característico associado à matriz A de T, $p_A(\lambda)$. Sejam $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ autovalores de T. Então é possível fatorar o polinômio característico usando estes autovalores, de modo que obtemos

$$p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{m_k} q(\lambda), \tag{8.1}$$

onde $q(\lambda)$ é o produto de polinômios irredutíveis, de grau maior ou igual a 2.

Definição 8.6 — Multiplicidade algébrica. Considere o polinômio característico, como em (8.1), de A. Diz-se que m_i é a *multiplicidade algébrica* do autovalor λ_i, $i = 1, \cdots, k$. Denotamos a multiplicidade algébrica de um autovalor λ_i por $m_a(\lambda_i) = m_i$.

▪ **Exemplo 8.6** No Exemplo 8.4, temos que $\lambda_1 = -\sqrt{2}$ e $\lambda_2 = \sqrt{2}$ são os autovalores de A, sendo também as raízes do polinômio característico $p_A(\lambda) = \lambda^2 - 2$. Isto significa que o polinômio característico pode ser escrito em termos de seus zeros

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - 2 = (\lambda - \sqrt{2})(\lambda + \sqrt{2}) = (\lambda - \sqrt{2})^1(\lambda + \sqrt{2})^1.$$

Portanto, a multiplicidade algébrica de λ_1 é igual a 1. Da mesma forma, a multiplicidade algébrica de λ_2 é igual a 1. Logo, $m_a(\lambda_1) = 1 = m_a(\lambda_2)$. ▪

▪ **Exemplo 8.7** Suponha o polinômio característico $p_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$ de uma matriz A. Note que $\lambda = 1$ é o único zero real de $p_A(\lambda)$. Ou seja, $p_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2$. Neste caso, a multiplicidade algébrica de $\lambda = 1$ é 2, isto é, $m_a(\lambda) = 2$. ▪

Proposição 8.3 Seja δ um autovalor de um operador $T : V \to V$. Então $m_g(\delta) \leq m_a(\delta)$.

Demonstração. Seja δ um autovalor de T. Suponha que $\dim V_\delta = r$, então existe uma base $\{v_1, \cdots, v_r\}$ de V_δ. Como V_δ é subgrupo de V, pelo teorema do completamento, podemos encontrar uma base β de V tal que $\beta = \{v_1, \cdots, v_r, w_{r+1}, \cdots, w_n\}$. Uma vez que $T(v_i) = \delta v_i$, para $i \in \{1, \cdots, r\}$, então a matriz de T segundo a base β pode ser escrita na forma

$$[T]^\beta_\beta = A = \begin{bmatrix} \delta I_r & A \\ 0 & B \end{bmatrix},$$

onde A e B são matrizes de ordem r e $n - r$, respectivamente. Portanto, o polinômio característico de A é dado por

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I_n) = \det\left(\begin{bmatrix} \delta I_r & A \\ 0 & B \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} \delta I_r & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} \right) \\ &= \det \begin{bmatrix} \delta I_r - \lambda I_r & A \\ 0 & B - \lambda I_{n-r} \end{bmatrix} = (\delta - \lambda)^r \det(B - \lambda I_{n-r}). \end{aligned}$$

Como δ ainda pode ser uma raiz do polinômio $\det(B-\lambda I_{n-r})$, segue que $m_a(\delta) \geq r$. E isto implica que $m_g(\delta) \leq m_a(\delta)$. ■

▪ **Exemplo 8.8** Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Descreva os autovalores e autoespaços de A e A^{-1}.

Vamos encontrar o polinômio característico relacionado à matriz A:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A-\lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \det\begin{bmatrix} -\lambda & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} \\ &= -\lambda(1-\lambda)-2 = \lambda^2-\lambda-2. \end{aligned}$$

Os autovalores são os zeros do polinômio. Neste caso, $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 2$. Fatorando o polinômio $p_A(\lambda)$ temos que $p_A(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda-2)$. Portanto, a multiplicidade algébrica de λ_1 é 1. O mesmo acontece para λ_2. Encontramos, agora, os autovetores associados aos autovalores acima.

Para $\lambda_1 = -1$, temos que $A-\lambda I = A+I = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Portanto,

$$(A-\lambda I)v = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x+2y = 0 \Rightarrow x = -2y.$$

Portanto, os autovetores relacionados a $\lambda_1 = -1$ são da forma (x,y) tal que $x = -2y$. Assim, o autoespaço é

$$V_{-1} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = -2y\} = \{(-2y,y) : y \in \mathbb{R}\} = [(-2,1)].$$

Logo, como a dimensão do autoespaço é igual a 1, então a multiplicidade geométrica de λ_1 também é 1, isto é, $m_g(\lambda_1) = 1$.

Para $\lambda_2 = 2$, temos que $A-\lambda I = A-2I = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Portanto,

$$(A-\lambda I)v = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x-y = 0 \Rightarrow x = y.$$

Assim, o autoespaço é

$$V_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\} = \{(x,x) : x \in \mathbb{R}\} = [(1,1)].$$

Logo, como a dimensão do autoespaço é igual a 1, então a multiplicidade geométrica de λ_2 também é 1, i.e., $m_g(\lambda_2) = 1$.

Vamos estudar agora os autovalores e autovetores para A^{-1}. Para isto, devemos encontrar A^{-1}:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] L_1 \leftrightarrow L_2 \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] L_2 \to \frac{1}{2}L_2$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right] L_1 \to -L_2 + L_1 \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right]$$

Logo, $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$. Calculamos seu polinômio característico:

$$\begin{aligned} p_{A^{-1}}(\lambda) &= \det(A^{-1} - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} - \lambda & 1 \\ \frac{1}{2} & -\lambda \end{bmatrix} \\ &= -\lambda(-\frac{1}{2} - \lambda) - \frac{1}{2} = \lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Os autovalores de A^{-1} são os zeros de $p_{A^{-1}}(\lambda)$, a saber, $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = \frac{1}{2}$. Agora, encontramos os autoespaços associados a estes autovalores.

Para $\lambda_1 = -1$, temos que $A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}+1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$. Portanto,

$$(A - \lambda_1 I)v = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{x}{2} + y = 0 \Rightarrow x = -2y.$$

Assim, o autoespaço é

$$V_{-1} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = -2y\} = \{(-2y, y) : y \in \mathbb{R}\} = [(-2,1)].$$

Para $\lambda_2 = \frac{1}{2}$, temos que $A - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}-\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0-\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$. Portanto,

$$(A - \lambda_2 I)v = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -x + y = 0 \Rightarrow x = y.$$

Assim, o autoespaço é

$$V_{\frac{1}{2}} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\} = \{(x,x) : y \in \mathbb{R}\} = [(1,1)].$$

Note que as multiplicidades algébricas e geométricas dos autovalores de A e A^{-1} são dadas por

$$m_a(-1) = 1 = m_a(1/2) \text{ e } m_g(-1) = 1 = m_a(1/2).$$

■

Observe, no exemplo acima, que os autoespaços de A são os mesmos autoespaços de A^{-1}. Além disso, os autovalores de A^{-1} são os inversos multiplicativos dos autovalores de A. Uma pergunta natural é se esse é um fato isolado para a matriz A deste exemplo ou se é algo mais abrangente. A proposição a seguir responde essa questão.

Proposição 8.4 Seja A uma matriz invertível. Se v é um autovetor de A associado ao autovalor $\lambda \neq 0$ então v também é autovetor de A^{-1} associado ao autovalor $\frac{1}{\lambda}$.

Demonstração. Como λ é um autovalor de uma matriz A então existe um autovetor v tal que $Av = \lambda v$. Daí,

$$\begin{aligned} Av = \lambda v &\Rightarrow A^{-1}Av = A^{-1}(\lambda v) \\ &\Rightarrow Iv = \lambda A^{-1}v \\ &\Rightarrow \lambda A^{-1}v = v \\ &\Rightarrow A^{-1}v = \frac{1}{\lambda}v. \end{aligned}$$

■

A proposição acima mostra que:

1. Se λ é um autovalor de uma matriz A então $\frac{1}{\lambda}$ é um autovalor para A^{-1};
2. Um autovetor de A é também um autovetor de A^{-1}.

▪ **Exemplo 8.9** Seja $T : \mathscr{P}_2 \to \mathscr{P}_2$ tal que $T(ax^2+bx+c) = ax^2+cx+b$. Estudamos os autovalores e autovetores de T.

1. Encontrar a matriz de T em relação à base canônica de $\mathscr{P}_2$:

$$\begin{aligned} T(1) &= T(0x^2+0x+1) = 0x^2+1x+0 = x = 0\cdot 1+1\cdot x+0\cdot x^2 \\ T(x) &= T(0x^2+1x+0) = 0x^2+0x+1 = 1 = 1\cdot 1+0\cdot x+0\cdot x^2 \\ T(x^2) &= T(1x^2+0x+0) = 1x^2+0x+0 = x^2 = 0+0\cdot x+1\cdot x^2. \end{aligned}$$

   Portanto, a matriz de T é dada por:

$$A = [T] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Achemos o polinômio característico de A:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = \det(A-\lambda I) &= \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2(1-\lambda)-(1-\lambda) \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2-1). \end{aligned}$$

3. Os autovalores reais de T são tais que $p_A(\lambda) = 0$, ou seja, $(1-\lambda)(\lambda^2-1) = 0$:

$$(1-\lambda)(\lambda^2-1) = 0 \Rightarrow 1-\lambda = 0 \text{ e } \lambda^2-1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \text{ e } \lambda = \pm 1.$$

   Assim, $p_A(\lambda) = -(\lambda+1)(\lambda-1)^2$. Assim, a multiplicidade algébrica de $\lambda = 1$ é 2 e a multiplicidade algébrica de $\lambda = -1$ é 1.
4. Autovetores relacionados ao autovalor $\lambda = 1$:

$$\begin{aligned} (A-I)v = 0 &\Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{cases} -a+b = 0 \\ a-b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = b. \end{aligned}$$

Portanto, todos os autovetores associados a $\lambda = 1$ são da forma $(a,a,0)$:

$$V_1 = \{ax^2+bx+c \in \mathscr{P}_2 : a = b\} = \{ax^2+ax+c : a,c \in \mathbb{R}\} = [x^2+x, 1].$$

Portanto, $m_g(1) = \dim V_1 = 2$.

5. Para $\lambda = -1$, temos

$$(A+I)v = 0 \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-a \\ c=0 \end{cases}.$$

Logo,

$$V_{-1} = \{ax^2+bx+c \in \mathscr{P}_2 : b = -a, c = 0\} = \{ax^2-ax : a \in \mathbb{R}\} = [x^2-x].$$

Logo, $m_g(-1) = 1$.

■

■ **Exemplo 8.10** Estude os autovalores e autovetores da transformação $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ definida por $T(z_1,z_2) = (-z_2,z_1)$. Considere $\mathbb{C}^2$ com um espaço vetorial complexo.

1. Matriz de T:
   Vamos calcular a matriz de T em relação à base canônica de $\mathbb{C}^2$, $\beta = \{(1,0),(0,1)\}$. Mostremos que β é uma base de $\mathbb{C}^2$, como um espaço vetorial complexo. Os vetores de β são obviamente LI. Só precisamos mostrar que $\mathbb{C}^2$ é gerado pelo vetores de β. De fato, seja $(z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2$. Temos que existem $a,b \in \mathbb{C}$ tais que

   $$(z_1,z_2) = a(1,0)+b(0,1). \implies (z_1,z_2) = (a,b).$$

   Portanto,

   $$\begin{aligned} T(1,0) &= (0,1) = 0(1,0)+1(0,1); \\ T(0,1) &= (-1,0) = -1(1,0)+0(0,1) \end{aligned}$$

   Portanto, a matriz de T em relação à base canônica de $\mathbb{C}^2$ é

   $$A = [T] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Polinômio característico:

   $$p_A(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2+1.$$

3. Autovalores:
   Como $\mathbb{C}^2$ é um espaço vetorial complexo, temos que os zeros de $p_A(\lambda)$ são tais que

   $$\lambda^2+1 = 0 \implies \lambda^2 = -1 \implies \lambda = \pm i.$$

   Logo, $\lambda_1 = i$ e $\lambda_2 = -i$ são os autovalores de T. Note que $p_A(\lambda) = (\lambda-i)(\lambda+i)$. Logo, a multiplicidade algébrica de λ_1 e λ_2 é igual a 1.

4. Autoespaços:
   a. Para $\lambda_1 = i$:

$$\begin{aligned}(A-iI)v=0 &\iff \begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\iff \begin{cases} -iz_1 - z_2 = 0 \\ z_1 - iz_2 = 0 \end{cases} \\ &\iff z_1 = iz_2\end{aligned}$$

   Logo,

$$V_i = \{(z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2; z_1 = iz_2\} = \{(iz_2,z_2); z_2 \in \mathbb{C}\} = \{z_2(i,1); z_2 \in \mathbb{C}\} = [(i,1)].$$

   b. Para $\lambda_2 = -i$:

$$\begin{aligned}(A+iI)v=0 &\iff \begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\iff \begin{cases} iz_1 - z_2 = 0 \\ z_1 + iz_2 = 0 \end{cases} \\ &\iff z_2 = iz_1\end{aligned}$$

   Logo,

$$V_{-i} = \{(z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2; z_2 = iz_1\} = \{(z_1,iz_1); z_1 \in \mathbb{C}\} = \{z_1(1,i); z_1 \in \mathbb{C}\} = [(1,i)].$$

5. Multiplicidades: Como $\dim V_i = 1$ então a multiplicidade geométrica de $\lambda_1 = i$ é 1. Do mesmo modo, como $\dim V_{-i} = 1$ então a multiplicidade geométrica de $\lambda_2 = -i$ é 1.

∎

Se $\mathbb{C}^2$ é um espaço vetorial real então a base canônica de $\mathbb{C}^2$ é $\{(1,0),(0,1),(i,0),(0,i)\}$. Temos que todo número complexo é escrito como $z = a+bi$, com $a,b \in \mathbb{R}$. Sejam, $z_1 = a_1 + b_1 i$ e $z_2 = a_2 + b_2 i$ então sendo $x,y,t,w \in \mathbb{R}$, temos

$$(z_1,z_2) = (a_1 + b_1 i, a_2 + b_2 i) = x(1,0) + y(0,1) + t(i,0) + w(0,i) = (x+ti, y+wi).$$

A igualdade acima implica que $a_1 + b_1 i = x + ti$ e $a_2 + b_2 i = y + wi$, e daí, $a_1 = x$, $b_1 = t$, $a_2 = y$ e $b_2 = w$. Os vetores do conjunto $\{(1,0),(0,1),(i,0),(0,i)\}$ são LI considerando $\mathbb{C}^2$ como espaço vetorial real, pois não existe nenhum número real k tal que $k(1,0) = (i,0)$. Logo, temos que $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^2 = 4$ e $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2 = 2$.

No caso do exemplo anterior, verificamos qual é a matriz de T, considerando $\mathbb{C}^2$ como um espaço vetorial real. Neste caso, a base de $\mathbb{C}^2$ é $\{(1,0),(0,1),(i,0),(0,i)\}$. Então,

$$\begin{aligned}T(1,0) &= (0,1) = 0(1,0) + 1(0,1) + 0(i,0) + 0(0,i); \\ T(0,1) &= (-1,0) = -1(1,0) + 0(0,1) + 0(i,0) + 0(0,i); \\ T(i,0) &= (0,i) = 0(1,0) + 0(0,1) + 0(i,0) + 1(0,i); \\ T(0,i) &= (-i,0) = 0(1,0) + 0(0,1) - 1(i,0) + 0(0,i).\end{aligned}$$

Portanto, a matriz de T, neste caso, é

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exercício: Calcule os autovalores e autoespaços de T, para o caso em que $\mathbb{C}^2$ é um espaço vetorial real.

8.3 Subespaços invariantes

Um subespaço vetorial W de V é invariante por um operador linear $T : V \to V$ quando $T(W) \subset W$.

▪ **Exemplo 8.11** Sejam V um espaço vetorial e $T : V \to V$ um operador linear. Sao exemplos de subespaços invariantes:

1. O núcleo de T, $\mathscr{N}(T)$.
   Temos $T(\mathscr{N}(T)) = \{0\} \subset \mathscr{N}(T)$.
2. O espaço imagem de T, $Im(T)$;
3. O autoespaço V_λ, para qualquer autovalor λ de T.
   Seja $v \in V_\lambda$, temos que $T(v) = \lambda v \in V_\lambda$. Logo, $T(V_\lambda) \subset V_\lambda$.

▪

Teorema 8.2 A autovalores diferentes do mesmo operador linear correspondem autovetores linearmente independentes.

Demonstração. Sejam $T : V \to V$ um operador linear e $v_1, \cdots, v_m$ autovetores de T com $T(v_1) = \lambda_1 v_1, \cdots, T(v_m) = \lambda_m v_m$, onde $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ são autovalores de T dois a dois distintos. Se $m = 1$ então é óbvio que um único autovetor associado a um λ_1 é LI. Suponha que a afirmação seja válida para $m-1$, mostramos que vale para m. Dada a combinação linear,

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m = 0. \tag{8.2}$$

Aplicando o operador T a ambos os lados da equação acima, temos

$$\alpha_1 T(v_1) + \cdots + \alpha_m T(v_m) = 0 \Rightarrow \lambda_1 \alpha_1 v_1 + \cdots + \lambda_m \alpha_m v_m = 0. \tag{8.3}$$

Multiplicando a equação 8.2 por λ_m e subtraindo da equação 8.3, temos

$$\begin{aligned} \lambda_m(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m) - (\lambda_1 \alpha_1 v_1 + \cdots + \lambda_m \alpha_m v_m) &= 0 \Rightarrow \\ (\lambda_m - \lambda_1)\alpha_1 v_1 + \cdots + (\lambda_m - \lambda_{m-1})\alpha_{m-1} v_{m-1} + (\lambda_m - \lambda_m)\alpha_m v_m &= 0 \Rightarrow \\ (\lambda_m - \lambda_1)\alpha_1 v_1 + \cdots + (\lambda_m - \lambda_{m-1})\alpha_{m-1} v_{m-1} &= 0. \end{aligned}$$

Como, por hipótese de indução, $v_1, \cdots, v_{m-1}$ são LI então

$$(\lambda_m - \lambda_1)\alpha_1 = \cdots = (\lambda_m - \lambda_{m-1})\alpha_{m-1} = 0.$$

Como os autovalores de T são distintos então $\lambda_m - \lambda_i \neq 0$, $i = 1, \cdots, m-1$. Portanto, $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{m-1} = 0$. Desta forma, a equação 8.2 se resume a $\alpha_m v_m = 0$. Como $v_m \neq 0$, segue que $\alpha_m = 0$. Logo, a equação 8.2 ocorre se, e somente se, todos os coeficientes $\alpha_i = 0$. ■

Uma consequência direta do teorema acima é que um operador linear num espaço vetorial de dimensão finita n, admite no máximo n autovetores LI.

▪ **Exemplo 8.12** Seja $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Quais os autovalores e autovetores de A se A representa uma transformação linear entre espaços vetoriais reais e também para espaços vetoriais complexos.

1. Polinômio característico:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -1-\lambda & -2 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} \\ &= -\lambda(1+\lambda)^2 - 2 \\ &= -\lambda(1+2\lambda+\lambda^2) - 2 \\ &= -(\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda + 2) \\ &= -(\lambda^2+1)(\lambda+2) \end{aligned}$$

   Como espaço vetorial real, o único zero do polinômio característico é $\lambda = -2$, com multiplicidade algébrica 1.
   Como espaço vetorial complexo, temos os seguintes zeros: $\lambda_1 = -2$ e $\lambda^2 + 1 = 0$, o que implica que $\lambda_2 = i, \lambda_3 = -i$, cada um com multiplicidade algébrica 1, pois

$$p_A(\lambda) = -(\lambda - i)(\lambda + i)(\lambda + 2).$$

2. Autoespaços (para o caso real):
   Temos $\lambda = -2$:

$$\begin{aligned} (A+2I)v = 0 \iff & \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \iff & \begin{cases} x - 2y = 0 \\ y + z = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} x = 2y \\ z = -y \end{cases} . \end{aligned}$$

   Portanto, $V_{-2} = \{(x,y,z) : x = 2y, z = -y\} = \{(2y, y, -y); y \in \mathbb{R}\} = [(2,1,-2)]$.

3. Autoespaços (para o caso complexo)
   Para $\lambda_2 = i$:

$$
\begin{aligned}
(A-iI)v=0 \iff & \begin{bmatrix} -1-i & -2 & 0 \\ 0 & -1-i & 1 \\ 1 & 0 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\iff & \begin{cases} (-1-i)x-2y=0 \\ (-1-i)y+z=0 \\ x-iz=0 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} y=-\frac{1+i}{2}x \\ z=(1+i)y \\ z=-ix \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} y=-\frac{1+i}{2}x \\ z=-ix \end{cases} .
\end{aligned}
$$

   Portanto,

$$V_i = \{(x,y,z) : y = -\frac{1+i}{2}x, z = -ix\} = \{(x, -\frac{1+i}{2}x, -ix); x \in \mathbb{C}\} = [(2,-1-i,-2i)].$$

   Para $\lambda_3 = -i$:

$$
\begin{aligned}
(A+iI)v=0 \iff & \begin{bmatrix} -1+i & -2 & 0 \\ 0 & -1+i & 1 \\ 1 & 0 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\iff & \begin{cases} (-1+i)x-2y=0 \\ (-1+i)y+z=0 \\ x+iz=0 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} y=-\frac{1-i}{2}x \\ z=(1-i)y \\ z=ix \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} y=-\frac{1-i}{2}x \\ z=-ix \end{cases} .
\end{aligned}
$$

   Portanto,

$$V_{-i} = \{(x,y,z) : y = -\frac{1-i}{2}x, z = ix\} = \{(x, -\frac{1-i}{2}x, ix); x \in \mathbb{C}\} = [(2,-1+i,2i)].$$

4. Multiplicidades:

$$m_a(-2) = m_a(i) = m_a(-i) = 1 = m_g(-2) = m_g(i) = m_g(-i).$$

■

■ **Exemplo 8.13** Estude os autovalores e autovetores da transformação $T:\mathbb{C}^3\to\mathbb{C}^3$ definida por $T(x,y,z)=(x,-z,y)$. Considere $\mathbb{C}^3$ como um espaço vetorial complexo.

1. Matriz de T:
   Neste caso, consideramos a base canônica $\{e_1,e_2,e_3\}$. Daí temos:

$$\begin{aligned} T(e_1) &= e_1 = 1e_1+0e_2+0e_3\\ T(e_2) &= e_3 = 0e_1+0e_2+1e_3\\ T(e_3) &= -e_2 = 0e_1-1e_2+0e_3. \end{aligned}$$

   Portanto, a matriz de T é

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Polinômio característico:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda)=\det(A-\lambda I) &= \det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0\\ 0 & -\lambda & -1\\ 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix}\\ &= \lambda^2(1-\lambda)+(1-\lambda)\\ &= (\lambda^2+1)(1-\lambda)\\ &= -(\lambda+i)(\lambda-i)(\lambda-1). \end{aligned}$$

3. Autovalores: Os zeros de $p_A(\lambda)$ são $\lambda_1=1$, $\lambda_2=i$ e $\lambda_3=-i$.
4. Autoespaços:
   Para $\lambda_1=1$, temos

$$\begin{aligned} (A-I)v=0 \implies & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x\\ y\\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 0 \end{bmatrix}\\ \implies & \begin{cases} -y-z=0\\ y-z=0 \end{cases} \implies y=z=0. \end{aligned}$$

   Portanto,

$$V_1=\{(x,y,z);y=z=0\}=[(1,0,0)].$$

5. Multiplicidades:
   Termine o exemplo como exercício.

■

8.4 Exercícios

1. Determine os autovalores e autovetores correspondentes para cada matriz A de um espaço vetorial real:

a. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

e. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

f. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

2. Considere T um operador linear sobre $\mathbb{R}^4$ representado pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Determine:
   a. Polinômio característico;
   b. Autovalores;
   c. Autoespaços;
   d. Multiplicidades algébrica e geométricas.

3. Para cada operador linear a seguir, determine o polinômio característico, os autovalores, autoespaços correspondentes e as multiplicidades algébrica e geométrica de cada autovalor:
   a. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por $T(x,y) = (x,y)$.
   b. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por $T(x,y) = (y,x)$.
   c. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por $T(x,y) = (x+y,-x-y)$.
   d. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definida por $T(x,y,z) = (x+y+z,-x-y,z)$.
   e. $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, definida por

$$T(x,y,z,w) = (x+2y+3z+4w,-x+3y+2z,x+3y,4x).$$

   f. $T : \mathscr{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$, definida por

$$T(a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3) = a_3+a_2t+a_1t^2+a_0t^3.$$

   g. $T : \mathbb{M}_2 \to \mathbb{M}_2$, definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+y & y+z \\ z+w & x+w \end{bmatrix}.$$

4. Seja $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, definida por $T(z,w) = (\overline{z},\overline{w})$. Estude os autovalores e autovetores de T, desde que $\mathbb{C}^2$ seja um espaço vetorial

   a. real.
   b. complexo.

5. Seja $\mathbb{C}$ um espaço vetorial complexo e $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ um operador linear cuja matriz em relação à base $\beta = \{(i,0),(1,-i)\}$ é $[T]_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$.
   a. Determine a matriz de T em relação à base canônica de $\mathbb{C}^2$.
   b. Calcule os autoespaços de $\mathbb{C}^2$ em relação a T.

6. Sejam as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Estude os autovalores e autovetores de AB e BA.

7. Sejam A e B matrizes de mesma ordem. Mostre que AB e BA têm os mesmos autovalores.

8. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear. Se A é a matriz de T, mostre que o polinômio característico é dado por $p_A(\lambda) = \lambda^2 - Tr(A)\lambda + \det(A)$.

9. Sejam v um autovetor de T e S, com autovalores λ_1 e λ_2, respectivamente. Ache os autovalores e autovetores de
   a. αT, $\alpha \neq 0$;
   b. $S+T$;
   c. $S \circ T$.

10. Considere a transformação $T : V \to V$. Mostre que se $\lambda = 0$ é um autovalor de T então T não é injetiva.

11. Mostre que se A e B são matrizes semelhantes então seus polinômios característicos são iguais.

12. Pesquise e entenda uma demonstração do Teorema de Cayley-Hamilton que usa o Teorema Fundamental da Álgebra.

13. Sejam $T, S \in \mathscr{L}(V)$ tais que $T \circ S = S \circ T$. Mostre que $\mathscr{N}(S)$ e $Im(S)$ são subespaços invariantes por T.

14. Sejam $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ o espaço vetorial de todos os polinômios com coeficientes reais e o operador de derivação $D : \mathscr{P}(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}(\mathbb{R})$. Calcule os autovalores e autovetores de D.

15. Mostre que os subespaços vetoriais de $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ gerados por cada um dos subconjuntos abaixo são invariantes pelo operador de derivação $D : C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$:
   a. $\{\cos x, \operatorname{sen} x\}$.
   b. $\{x, xe^x, x^2e^x\}$.

16. Sejam U e W subespaços vetoriais de V invariantes pelo operador $T : V \to V$. Mostre que $U \cap V$ e $U + V$ também são invariantes por T.

9. Diagonalização de operadores

Diz-se que duas matrizes A e B são *semelhantes* se existe uma matriz invertível M tal que $A = MBM^{-1}$.

Como exemplo, suponha $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = Diag\{2,1\}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = Diag\{1,2\}$. As matrizes A e B são semelhantes pois a matriz $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = M^{-1}$ é tal que

$$\begin{aligned} MBM^{-1} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A. \end{aligned}$$

Uma matriz A é diagonalizável se ela for semelhante a uma matriz diagonal. Do mesmo modo, dizemos que um operador linear T é diagonalizável se a matriz de T for semelhante a uma matriz diagonal.

9.1 Operadores diagonalizáveis

Definição 9.1 Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \to V$ um operador linear. Diz-se que T é *diagonalizável* se existir uma base de V formada por autovetores de T.

▪ **Exemplo 9.1** Verifique se $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por $T(x,y) = (x+y, x-y)$, é diagonalizável.

Já vimos em exemplos anteriores que a matriz de T é

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Polinômio Característico:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A-\lambda I) = \det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{bmatrix} = -(1-\lambda)(1+\lambda)-1 = -(1-\lambda^2)-1 \\ &= \lambda^2-2 = (\lambda-\sqrt{2})(\lambda+\sqrt{2}). \end{aligned}$$

Autovalores: $\lambda_1 = -\sqrt{2}$ e $\lambda_2 = \sqrt{2}$.
Autovetores:
Para $\lambda_1 = -\sqrt{2}$, temos

$$\begin{aligned} (A+\sqrt{2}I)v = 0 &\implies \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1+\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\implies \begin{cases} (1+\sqrt{2})x+y=0 \\ x+(-1+\sqrt{2})y=0 \end{cases} \\ &\implies y = -(1+\sqrt{2})x. \end{aligned}$$

Um autovetor associado a λ_1 é $(1,-1-\sqrt{2})$.
Para $\lambda_2 = \sqrt{2}$, temos

$$\begin{aligned} (A-\sqrt{2}I)v = 0 &\implies \begin{bmatrix} 1-\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1-\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\implies \begin{cases} (1-\sqrt{2})x+y=0 \\ x+(-1-\sqrt{2})y=0 \end{cases} \\ &\implies y = -(1-\sqrt{2})x. \end{aligned}$$

Um autovetor associado a λ_2 é $(1,-1+\sqrt{2})$.
Note que $\{(1,-1-\sqrt{2}),(1,-1+\sqrt{2})\}$ é uma base de autovetores de T para $\mathbb{R}^2$. Logo, T é diagonalizável. ∎

Felizmente, como é de se esperar, existem outras maneiras de determinar se um operador é diagonalizável. O teorema a seguir estabelece um modo de verificar se um operador é diagonalizável a partir de suas multiplicidades algébricas e geométricas.

Teorema 9.1 Sejam V um espaço vetorial de dimensao finita e $T \in \mathscr{L}(V)$. Então as seguintes afirmações são equivalentes

1. T é diagonalizável.
2. Para cada autovalor de T as suas multiplicidades algébricas e geométricas são iguais.
3. A soma das multiplicidades geométricas de todos os autovalores de T é igual à dimensão de V.

Demonstração. 1. $\implies$ 2) Exercício!

2. $\implies$ 3) Sejam A a matriz de T e $n = \dim V$. Suponha que o polinômio característico de T é

$$p_A(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{d_1}\cdots(\lambda-\lambda_k)^{d_k}.$$

Daí, $m_a(\lambda_i) = d_i$, além disso, $m_a(\lambda_1) + \cdots + m_a(\lambda_k) = n$, que é o grau do polinômio característico. Como, por hipótese, $m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i)$, segue que

$$m_g(\lambda_1) + \cdots + m_g(\lambda_k) = n = \dim V.$$

3. $\Longrightarrow$ 1) Suponha que $m_g(\lambda_1) + \cdots + m_g(\lambda_k) = n = \dim V$. Então,

$$\dim V_{\lambda_1} + \cdots + \dim V_{\lambda_k} = \dim V.$$

Afirmamos que $V_{\lambda_i} \cap V_{\lambda_j} = \{0\}$, se $i \neq j$. Suponha, por absurdo, que existe $0 \neq v \in V_{\lambda_i} \cap V_{\lambda_j}$, com $i \neq j$. Então, $T(v) = \lambda_i v$ e $T(v) = \lambda_j v$. Mas $(\lambda_i - \lambda_j)v = 0$ o que implica que $\lambda_i = \lambda_j$, contradição. Logo,

$$V = V_{\lambda_1} + \cdots + V_{\lambda_k}.$$

Como a soma é direta, pois $V_{\lambda_i} \cap V_{\lambda_j} = \{0\}$, se $i \neq j$, segue que a reunião de todos os autovetores de V_{λ_i} forma uma base de V. Logo, T é diagonalizável. ■

Uma boa forma de conferir se T é diagonalizável é verificar se a seguinte condição é satisfeita: "*se a dimensão de V é n e* $T : V \to V$ *possui n autovalores distintos* $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ *então T é diagonalizável*". Neste caso, a matriz diagonal é da forma:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

▪ **Exemplo 9.2** Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Já calculamos quais são os autovalores dessa matriz, a saber, $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 2$. Podemos afirmar que a matriz A é diagonalizável, pois a transformação T está definida sobre $\mathbb{R}^2$, que tem dimensão 2 e A tem exatamente 2 autovalores distintos. A matriz diagonal é:

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Como encontrar a matriz M que diagonaliza a matriz A?

Um autovetor associado a $\lambda_1 = -1$ é o autovetor $(-2, 1)$ e um autovetor associado a $\lambda_2 = 2$ é o autovetor $(1, 1)$. Logo, a matriz M é dada por:

$$M = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

De fato,

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix},$$

e daí

$$\begin{aligned} MBM^{-1} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = A. \end{aligned}$$

■

Vamos formalizar o que vimos no exemplo anterior.

Proposição 9.1 Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz de ordem n diagonalizável, cuja matriz diagonal é da forma $D = Diag\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$. Então, a matriz que diagonaliza A é

$$M = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix},$$

onde cada v_i é um autovetor - escrito como vetor coluna - de A associado a λ_i.

Demonstração. Sendo $M = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$ uma matriz de ordem n, onde cada v_i é um vetor coluna de tamanho n, dado por

$$v_i = \begin{bmatrix} v_{i1} \\ v_{i2} \\ \cdots \\ v_{in} \end{bmatrix}.$$

Perceba que

$$\begin{aligned} AM &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} & v_{21} & \cdots & v_{n1} \\ v_{12} & v_{22} & \cdots & v_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{1n} & v_{2n} & \cdots & v_{nn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}v_{1j} & \sum_{j=1}^n a_{1j}v_{2j} & \cdots & \sum_{j=1}^n a_{1j}v_{nj} \\ \sum_{j=1}^n a_{2}v_{1j} & \sum_{j=1}^n a_{2j}v_{2j} & \cdots & \sum_{j=1}^n a_{2j}v_{nj} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj}v_{1j} & \sum_{j=1}^n a_{nj}v_{2j} & \cdots & \sum_{j=1}^n a_{nj}v_{nj} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$MD = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{21} & \cdots & v_{n1} \\ v_{12} & v_{22} & \cdots & v_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{1n} & v_{2n} & \cdots & v_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 v_{11} & \lambda_2 v_{21} & \cdots & \lambda_n v_{n1} \\ \lambda_1 v_{12} & \lambda_2 v_{22} & \cdots & \lambda_n v_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 v_{1n} & \lambda_2 v_{2n} & \cdots & \lambda_n v_{nn} \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$Av_i = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{i1} \\ v_{i2} \\ \cdots \\ v_{in} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}v_{ij} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}v_{ij} \\ \cdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}v_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_i v_{i1} \\ \lambda_i v_{i2} \\ \vdots \\ \lambda_i v_{in} \end{bmatrix} = \lambda_i \begin{bmatrix} v_{i1} \\ v_{i2} \\ \vdots \\ v_{in} \end{bmatrix} = \lambda_i v_i,$$

para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$. ■

▪ **Exemplo 9.3** Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.

Vamos encontrar os autovalores de A:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (1-\lambda)(2-\lambda) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda+1)(\lambda-4). \end{aligned}$$

Portanto, $p_A(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 4$. Logo, a matriz A é diagonalizável, pois tem dois autovalores distintos. Sua matriz diagonal é

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Vamos encontrar a matriz M que diagonaliza a matriz A. Para isso, precisamos encontrar pelo menos um autovetor associado a cada um dos autovalores.

Para $\lambda_1 = -1$, temos

$$\begin{aligned} (A - (-1)I)v = 0 \;&\Rightarrow\; \begin{bmatrix} 1-(-1) & 2 \\ 3 & 2-(-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow\; \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow\; 2x + 2y = 0 \\ &\Rightarrow\; y = -x. \end{aligned}$$

Portanto, um autovetor de A associado a λ_1 é $(1, -1)$.

Para $\lambda_2 = 4$, temos

$$\begin{aligned} (A - 4I)v = 0 \;&\Rightarrow\; \begin{bmatrix} 1-4 & 2 \\ 3 & 2-4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow\; \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow\; 3x - 2y = 0 \\ &\Rightarrow\; y = \frac{3}{2}x. \end{aligned}$$

Portanto, um autovetor de A associado a λ_1 é $(2,3)$. Logo, a matriz que diagonaliza A é a matriz:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

■

■ **Exemplo 9.4** Determinar os valores de a para os quais a matriz abaixo seja diagonalizável:

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Encontramos os autovalores de matriz A:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} a-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (a-\lambda)(1-\lambda).$$

Uma das maneiras de determinar se uma matriz é diagonalizável é verificando se todos os seus autovalores são distintos. No caso acima, para que isto aconteça, basta que $a \neq 1$ e $a \neq \lambda$.

Por outro lado, se os autovalores de A são iguais, então $a = 1$. Daí, $\det(A - \lambda I) = (1-\lambda)^2$. Isto significa que $\lambda = 1$ é o único autovalor de A com multiplicidade algébrica igual a 2. Devemos verificar qual a multiplicidade geométrica de $\lambda = 1$.

Para $\lambda = 1$, temos

$$\begin{aligned} (A-I)v = 0 \quad &\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1-1 & 1 \\ 0 & 1-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow \quad y = 0. \end{aligned}$$

Logo, os autovetores associados a $\lambda = 1$ são da forma $(x,0)$, com $x \in \mathbb{R}$, ou seja,

$$V_1 = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} = [(1,0)].$$

Como a dimensão de V_1 é igual a 1, segue que a multiplicidade geométrica de $\lambda = 1$ é 1. Como as multiplicidades algébricas e geométricas são diferentes, segue que A não é diagonalizável para $a = 1$. ■

■ **Exemplo 9.5** Verificar se a matriz abaixo é diagonalizável:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Polinômio característico:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3 - 1 = -(\lambda+1)(\lambda^2 - \lambda + 1),$$

onde o polinômio $\lambda^2 - \lambda + 1$ é irredutível, ou seja, não tem zeros reais.

Autovalores: o único autovalor real é igual a $\lambda = -1$. Sua multiplicidade algébrica é igual a 1. Temos as seguintes situações:

1. Se a multiplicidade geométrica $\lambda = -1$ for igual a 1, temos que a terceira condição do teorema não é satisfeita, pois a soma das multiplicidades geométricas é diferente da dimensão de $\mathbb{R}^3$. Logo, a matriz A não é diagonalizável.
2. Se a terceira condição do teorema for satisfeita então a multiplicidade geométrica do autovalor $\lambda = -1$ é igual a 3 (impossível). Mas tal multiplicidade é diferente da multiplicidade algébrica do autovalor, ferindo assim a condição dois. Logo, a matriz A não é diagonalizável.

■

■ **Exemplo 9.6** Verificar se a matriz abaixo é diagonalizável:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 12 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Polinômio característico:

$$\begin{aligned}
p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 1 \\ 12 & 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} \\
&= (-1)^{2+4} 1 \cdot \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 12 & 0 & 3-\lambda \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{4+4}(-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 12 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (-12 + (2-\lambda)(3-\lambda)) - \lambda((2-\lambda)^2(3-\lambda) - 12(2-\lambda)) \\
&= (-12 + (2-\lambda)(3-\lambda)) - \lambda(2-\lambda)((2-\lambda)(3-\lambda) - 12) \\
&= [1 - \lambda(2-\lambda)][(2-\lambda)(3-\lambda) - 12] \\
&= (1 - 2\lambda + \lambda^2)(-6 - 5\lambda + \lambda^2) \\
&= (\lambda - 1)^2(\lambda - 6)(\lambda + 1).
\end{aligned}$$

Autovalores: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = -1$.

Como a multiplicidade algébrica de λ_1 é 2, vamos primeiro calcular a sua multiplicidade geométrica. Para isso, calculamos o autoespaço associado a este autovalor.

Para $\lambda_1 = 1$, temos

$$
\begin{aligned}
(A-\lambda_1 I)v = 0 \quad &\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 2-1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2-1 & 0 & 1 \\ 12 & 0 & 3-1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 12 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&\Rightarrow \quad \begin{cases} x+z=0 \\ y+w=0 \\ 12x+2z=0 \\ -y-w=0 \end{cases} \\
&\Rightarrow \quad \begin{cases} z=-x \\ w=-y \\ 12x+2z=0 \end{cases} \\
&\Rightarrow \quad \begin{cases} z=-x \\ w=-y \\ x=0 \end{cases} \\
&\Rightarrow \quad \begin{cases} w=-y \\ x=z=0 \end{cases} .
\end{aligned}
$$

Portanto, os autovetores associados a $\lambda_1 = 1$ são da forma $(0, y, 0, -y)$. Portanto,

$$V_1 = [(0,1,0,-1)].$$

Assim, a multiplicidade geométrica de $\lambda_1 = 1$, diferente da sua multiplicidade algébrica, ferindo assim o Teorema. Logo, A não é diagonalizável. ∎

∎ **Exemplo 9.7** $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ é diagonalizável?.

O polinômio característico de A é

$$p_A(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

Note que tal polinômio não tem zeros reais, mas possui zeros complexos, a saber, $\lambda_1 = i$ e $\lambda_2 = -i$. Portanto, A possui somente autovalores complexos e o polinômio característico pode ser fatorado

$$p_A(\lambda) = (\lambda - i)(\lambda + i).$$

Para $\lambda_1 = i$, temos

$$(A - iI)v = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -ix + y = 0 \\ -x - iy = 0 \end{cases} \Rightarrow y = ix.$$

Portanto, o autoespaço associado a λ_1 é

$$V_i = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 : y = ix\} = \{(x,ix) : x \in \mathbb{C}\} = [(1,i)].$$

Para $\lambda_2 = -i$, temos

$$(A + iI)v = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ix + y = 0 \\ -x + iy = 0 \end{cases} \Rightarrow y = -ix.$$

Portanto, o autoespaço associado a λ_2 é

$$V_{-i} = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 : y = ix\} = \{(x,-ix) : x \in \mathbb{C}\} = [(1,-i)].$$

Logo, a matriz A é diagonalizável (considerando V um espaço vetorial complexo) e existe uma base β, formada por autovetores de A com $\beta = \{(1,i),(1,-i)\}$, tal que a matriz A e semelhante à matriz

$$\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}.$$

Como $p_A(\lambda)$ não possui zeros reais, segue que a matriz A não é diagonalizável, se considerarmos o espaço vetorial V como um espaço vetorial real. ∎

∎ **Exemplo 9.8** Seja $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

O polinômio característico de A é

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & -5 \\ 0 & 1 & -2-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (3-\lambda)(2-\lambda)(-2-\lambda) + 5(3-\lambda) \\ &= (3-\lambda)[-(2-\lambda)(2+\lambda)+5] = (3-\lambda)(\lambda^2 - 4 + 5) \\ &= (3-\lambda)(\lambda^2+1) \\ &= (3-\lambda)(\lambda+i)(\lambda-i). \end{aligned}$$

Portanto, A não é diagonalizável em relação ao reais, mas é diagonalizável em relação aos complexos, pois A possui 3 autovalores distintos e A age sobre $\mathbb{C}^3$, que tem dimensão 3. ∎

▪ **Exemplo 9.9** $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é diagonalizável?.

O polinômio característico de A é

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A-\lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (-1)^{4+4}(1-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)[\lambda^2(1-\lambda)+(1-\lambda)] \\ &= (1-\lambda)^2(\lambda^2+1) \\ &= (\lambda-1)^2(\lambda+i)(\lambda-i). \end{aligned}$$

Temos, portanto, os seguintes autovalores $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -i$ e $\lambda_3 = i$. Como λ_2 e λ_3 têm, cada um, multiplicidade algébrica 1, segue que a multiplicidade geométrica também é 1. Para que A não seja diagonalizável, algum problema deveria ocorrer em λ_1. Vejamos.

Para $\lambda_1 = 1$ temos que calcular o autoespaço:

$$\begin{aligned} (A-I)v = 0 \;\Rightarrow\; & \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow\; & \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow\; & \begin{cases} -x+y=0 \\ -x-y=0 \\ t=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ t=0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Assim, o autoespaço associado a λ_1 é

$$V_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x = y = t = 0\} = \{(0,0,z,0) : z \in \mathbb{R}\} = [(0,0,1,0)].$$

Portanto, uma vez que a multiplicidade geométrica de λ_1 é igual a 1 e é diferente da sua multiplicidade algébrica, que é 2, segue que A não é diagonalizável. ▪

9.2 Polinômio minimal

Definição 9.2 Seja A uma matriz quadrada. O *polinômio minimal* de A é um polinômio mônico

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

tal que

i. $p(A) = 0$, i.e., p anula a matriz A;
ii. $p(\lambda)$ é o polinômio de menor grau que anula A.

Denota-se o polinômio minimal por $m_A(\lambda)$.

▪ **Exemplo 9.10** Considere $p(\lambda) = \lambda^2 + 1$. Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, então

$$p(A) = A^2 + I = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Por outro lado, sendo $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, então

$$p(B) = B^2 + I = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, $p(\lambda)$ é um polinômio minimal para B. ▪

▪ **Exemplo 9.11** O polinômio característico da matriz real $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ é $p_A(\lambda) = \lambda(\lambda - 2)$. O polinômio característico, neste caso, também é o polinômio minimal, pois o coeficiente do termo de maior grau é igual a 1, ou seja, $p_A(\lambda)$ é mônico, e ainda

$$\begin{aligned} p_A(A) &= A(A - 2I) = A^2 - 2A \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Além disso, $p_A(\lambda)$ é o polinômio de menor grau que anula A, pois nenhum polinômio de grau 1 anula A. ▪

Condição para que A seja diagonalizável: Uma condição para que a matriz A seja diagonalizável é que o polinômio minimal seja da forma $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)\cdots(\lambda - \lambda_k)$, onde $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ sejam dois a dois distintos. Provamos isso na proposição a seguir.

Proposição 9.2 Sejam $T : V \to V$ diagonalizável, A a matriz de T e $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ autovalores de A, dois a dois distintos. Então, o polinômio minimal de A é escrito como

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_r).$$

Demonstração. Seja v um autovetor de A então $(A - \lambda_i I)v = 0$, para algum i. Portanto

$$(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) \cdots (A - \lambda_r I)v = 0,$$

para qualquer autovetor v de A. Como A é diagonalizável, então existe uma base de V formada por autovetores de A. Logo,

$$p(A) = (A - \lambda_1 I) \cdots (A - \lambda_r I) = 0.$$

■

▪ **Exemplo 9.12** Considere o operador linear definido pela matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Como A tem 3 autovalores distintos, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 = 2$, então A é diagonalizável e o polinômio característico é também o polinômio minimal

$$p(\lambda) = -\lambda(\lambda + 1)(\lambda - 2).$$

▪

9.3 Forma canônica de Jordan

Já sabemos que nem todas as matrizes podem ser diagonalizadas, mesmo V sendo um espaço vetorial complexo. Porém, é sempre possível nos aproximar da forma diagonal, conhecida como forma canônica de Jordan, que é uma matriz diagonal por blocos

$$J = diag(A_1, A_2, \cdots, A_k) = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_k \end{bmatrix},$$

onde A_i é uma submatriz de J.

Sejam V um espaço vetorial complexo e $T : V \to V$ um operador linear com matriz A. Considere o polinômio característico

$$p_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1} \cdots (\lambda_n - \lambda)^{m_n} ((\lambda - \alpha_1)^2 + \beta_1^2)^{p_1} \cdots ((\lambda - \alpha_k)^2 + \beta_k^2)^{p_k} \tag{9.1}$$

Note que estamos admitindo autovalores reais λ_p, $p = 1, \cdots, n$, e complexos $\alpha_q + i\beta_q$, $q = 1, \cdots, k$. Temos, portanto, dois casos:

Caso 1: Para cada λ zero real do polinômio $p_A(\lambda)$, define-se um bloco de Jordan $J(\lambda, r)$ como uma matriz de ordem r, dada por:

$$J(\lambda,r) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix}_{r\times r} = \lambda I + N,$$

onde I é a matriz identidade e N é nilpotente com $N^r = 0$.

Caso 2: Para cada $\alpha + i\beta$ um zero complexo do polinômio $p_A(\lambda)$ e r um número par, define-se

$$R(\alpha,\beta;r) = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta & \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\beta & \alpha \end{bmatrix}_{r\times r}.$$

Teorema 9.2 Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Seja $T \in \mathscr{L}(V)$ cujo polinômio característico é dado por

$$p_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1} \cdots (\lambda_n - \lambda)^{m_n} ((\lambda - \alpha_1)^2 + \beta_1^2)^{p_1} \cdots ((\lambda - \alpha_k)^2 + \beta_k^2)^{p_k},$$

onde $\lambda_r \neq \lambda_s$ e $(\alpha_r, \beta_r) \neq (\alpha_s, \beta_s)$, com $r \neq s$ e $\beta_r > 0$. Então é sempre possível encontrar uma base de V tal que a matriz de T em relação a esta base é da forma

$$J = diag(J_1, \cdots, J_p, R_1, \cdots, R_q),$$

onde J_i são blocos da forma $J(\lambda, r)$ e R_j são blocos da forma $R(\alpha, \beta; r)$.

Para demonstração deste teorema, siga os passos das páginas 338 a 344 do livro Álgebra Linear, seção 2A, Elon Lages de Lima.

9.3.1 Relação entre multiplicidade dos autovalores e os blocos de Jordan

1. A multiplicidade algébrica de λ indica a soma das ordens de todos os blocos associados a λ.
2. A multiplicidade geométrica de λ indica quantos blocos estão associados a λ.

▪ **Exemplo 9.13** Encontre as possíveis matrizes na forma canônica de Jordan cujo polinômio característico é dado por $p_A(\lambda) = (\lambda - 3)^3(\lambda + 1)^2(\lambda - 1)$. Temos 3 autovalores:

- $\lambda_1 = -1$, com multiplicidade algébrica 2;

- $\lambda_2 = 1$, com multiplicidade algébrica 1;
- $\lambda_3 = 3$, com multiplicidade algébrica 3.

1. Para $\lambda_1 = -1$, temos duas possibilidade quanto à multiplicidade geométrica.
   - Se a sua multiplicidade geométrica for igual à multiplicidade algébrica, então temos dois blocos de ordem 1, uma vez que a multiplicidade algébrica nos diz qual é a soma das ordens de todos os blocos associados a λ_1. Portanto, cada bloco é escrito como
   $$J_1(-1;1) = \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix} = J_2(-1;1).$$
   - Se a multiplicidade geométrica de λ_1 for igual a 1, então existe apenas um bloco associado a λ_1
   $$J_1(-1;2) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$
2. Para $\lambda_2 = 1$, como as multiplicidade algébricas e geométricas são iguais a 1, segue que o único bloco corresponde a esse autovalor é
   $$J_3(1;1) = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}.$$
3. Para $\lambda_3 = 3$, com multiplicidade algébrica 3, temos
   - Se a multiplicidade geométrica é igual a 1, então temos um único bloco de ordem 3:
   $$J_4(3;3) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$
   - Se a multiplicidade geométrica é igual a 2, temos dois blocos, sendo um bloco de ordem 1 e outro bloco de ordem 2 (já que a soma das ordens dos blocos deve ser igual à multiplicidade algébrica):
   $$J_4(3;1) = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}, J_5(3;2) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$
   - Se a multiplicidade geométrica é igual a 3, temos três blocos de ordem 1:
   $$J_6(3;1) = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}.$$

Portanto, as possíveis matrizes na forma canônica de Jordan são:

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

$$J=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad J=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

$$J=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad J=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

■

■ **Exemplo 9.14** Achar a forma canônica de Jordan da matriz

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 12 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico de A é:

$$p_A(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-6)(\lambda+1).$$

Os autovalores são: $\lambda_1=-1, \lambda_2=1, \lambda_3=6$. Esta matriz não é diagonalizável, pois a multiplicidade geométrica de λ_2 é igual a 1 e sua multiplicidade algébrica de é igual a 2. Mas é possível calcular a forma canônica de Jordan:

- Para $\lambda_1=-1$, temos que $m_a(-1)=1=m_g(-1)$. Portanto, so existe um bloco de Jordan de ordem 1:
$$J_1(-1;1)=\begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix}.$$
- Para $\lambda_2=1$. Temos que $m_g(1)=1$. Portanto, existe somente um bloco de Jordan de ordem $m_a(1)=2$. Daí,
$$J_2(1;2)=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
- Para $\lambda_3=6$. Como $m_a(6)=1=m_g(6)$, então existe um único bloco de Jordan:
$$J_3(6;1)=\begin{bmatrix} 6 \end{bmatrix}.$$

Logo, a forma canônica de Jordan da matriz A é a matriz

$$J=diag(J_1,J_2,J_3)=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

■

▪ **Exemplo 9.15** Voltamos à matriz dada no Exemplo 9.9.

Temos 3 autovalores: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -i$ e $\lambda_3 = i$. Para λ_2 e λ_3, temoso caso complexo, onde tomamos $\alpha + i\beta = i$, e daí, $\alpha = 0$ e $\beta = 1$. Portanto, o bloco de Jordan, neste caso, é

$$R(0,1;2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Além disso, para $\lambda_1 = 1$, temos $m_a(\lambda_1) = 2$ e $m_g(\lambda_1) = 1$. Portanto, existe apenas 1 bloco de ordem 2:

$$J_1(\lambda_1, 2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo, a forma canônica de Jordan da matriz A é

$$J = diag(J_1, R(0,1;2)) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

▪

▪ **Exemplo 9.16** Achar a forma canônica de Jordan da matriz abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico de A é

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) &= \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & -5 \\ 0 & 1 & -2-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (3-\lambda)(2-\lambda)(-2-\lambda) + 5(3-\lambda) \\ &= (3-\lambda)[-(2-\lambda)(2+\lambda) + 5] \\ &= (3-\lambda)(\lambda^2 - 4 + 5) \\ &= (3-\lambda)(\lambda^2 + 1) \\ &= (3-\lambda)(\lambda - i)(\lambda + i) \end{aligned}$$

Temos daí que os autovalores de A são $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = i$ e $\lambda_3 = -i$.

- Para $\lambda_1 = 3$ temos que $m_a(3) = 1 = m_g(3)$. Portanto, existe um único bloco de Jordan

$$J_1(3;1) = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}.$$

- Quando o autovalor é complexo, ele sempre vem em par, o autovalor $\lambda = z = \alpha + \beta i$ e $\lambda = \bar{z} = \alpha - \beta i$. Pelo teorema, tomamos o autovalor onde $\beta > 0$. Assim, a multiplicidade algébrica de λ_2 é o dobro do expoente de $\lambda - i$, i.e., $m_a(i) = 2$. Como cada bloco de Jordan complexo tem ordem 2, segue que temos um único bloco de ordem 2:

$$R(0,1;2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, a forma canônica de Jordan para a matriz A é a matriz:

$$J = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

■

■ **Exemplo 9.17** Se uma matriz de ordem 3 tem autovalores: 3, 3 e 3, quais são as possíveis formas canônicas de Jordan dessa matriz?

Uma vez que os três autovalores são iguais a 3, segue que $\lambda = 3$ tem multiplicidade algébrica 3. Basta estudar as possibilidade para a multiplicidade geométrica.

- Se a multiplicade geométrica de λ é igual a 1, então existe apenas 1 bloco de Jordan de ordem 3. Logo, a forma de Jordan da matriz é

$$J = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

- Se a multiplicade geométrica de λ é igual a 2, então existem dois blocos cuja soma das ordens dos blocos é igual a 3, que é a multiplicade algébrica. Temos, portanto, um bloco de ordem 1 e um bloco de ordem 2:

$$J_1(3;1) = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}; J_2(3;2) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

  Logo, a forma de Jordan da matriz é

$$J = diag(J_1, J_2) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

- Se a multiplicade geométrica de λ é igual a 3, então existem 3 blocos cuja soma dos blocos é igual a 3. Assim, cada bloco tem ordem 1

$$J_1(3;1) = J_2(3;1) = J_3(3;1) = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}.$$

  Logo, a forma de Jordan da matriz é

$$J = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

■

■ **Exemplo 9.18** Se uma matriz de ordem 4 tem autovalores: 1, 2 e 3, quais são as possíveis formas canônicas de Jordan dessa matriz?

Como se tem 3 autovalores e a matriz tem ordem 4, então um dos autovalores deve ter multiplicidade algébrica 2, pois o polinômio característico tem grau 4.

- Considere o autovalor 1 com multiplicidade algébrica 2, isto significa que a sua multiplicidade geométrica pode ser igual a 1 ou igual a 2.
  Se $m_g(1) = 1$ então existe somente 1 bloco de Jordan de ordem 2:

$$J_1(1;2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

  Como a multiplicade algébrica de 1 é igual a 2, então $m_a(2) = 1 = m_a(3)$, pois a soma das multiplicidade algébricas é igual ao grau do polinômio característico. Portanto, $m_g(2) = 1$ e $m_g(3) = 1$. Logo, os blocos de Jordan desses autovalores são

$$J_2(2;1) = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}, \quad J_3(3;1) = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}.$$

  Logo, a forma de Jordan procurada é

$$J = diag(J_1, J_2, J_3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

  Se $m_g(1) = 2$ então existe somente 2 blocos de Jordan de ordem 1:

$$J_1(1;1) = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} = J_4(1;1)$$

  Logo, a forma de Jordan neste caso é

$$J = diag(J_1, J_4, J_2, J_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

- Considere o autovalor 2 com multiplicidade algébrica 2. Portanto, $m_a(1) = 1 = m_a(3)$. Logo, as possíveis matrizes de Jordan são

$$m_g(2) = 1 \implies J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

$$m_g(2) = 2 \implies J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

- Considere o autovalor 3 com multiplicidade algébrica 2. Portanto, $m_a(1) = 1 = m_a(2)$. Logo, as possíveis matrizes de Jordan são

$$m_g(3) = 1 \implies J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

$$m_g(3) = 2 \implies J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

■

9.3.2 Autoespaços generalizados

Veremos como encontrar a matriz M tal que $M^{-1}AM = J$, onde A é a matriz da transformação linear e J é a forma de Jordan.

Suponha que λ seja um autovalor de A tal que $m_a(\lambda) = m$ e $m_g(\lambda) = 1$. Então λ é um zero de $p_A(\lambda)$ e tem autoespaço $V_\lambda = [v_1]$. Note que, isto significa que $Av_1 = \lambda v_1$.

Um vetor v_m é um *autovetor generalizado* de ordem m da matriz A se

$$(A - \lambda I)^m v_m = 0,$$

mas

$$(A - \lambda I)^{m-1} v_m \neq 0.$$

O autovetor generalizado de ordem 1 é o vetor v_1 tal que $(A - \lambda I)v_1 = 0$, i.e., v_1 é um autovetor de A chamado de *autovetor ordinário (ou genuíno)*.

O *autoespaço generalizado* de ordem m é $\mathscr{N}((A - \lambda I)^m)$. Temos assim que $v_1, \cdots, v_m \in \mathscr{N}((A - \lambda I)^m)$. Note que v_m é, por definição, um autovetor generalizado de $(A - \lambda I)^m$. Considere o autovetor generalizado v_{m-1}, de ordem $m-1$. Por definição, este autovetor generalizado é tal que $(A - \lambda I)^{m-1} v_{m-1} = 0$. Basta aplicar $A - \lambda I$ a ambos os lados da igualdade:

$$(A - \lambda I)(A - \lambda I)^{m-1} v_{m-1} = (A - \lambda I)0 \implies (A - \lambda I)^m v_{m-1} = 0 \implies v_{m-1} \in \mathscr{N}(A - \lambda I)^m.$$

Procedendo recursivamente, mostra-se que $v_i \in \mathscr{N}((A - \lambda I)^m)$, para todo $i = m, \cdots, 1$. De fato, seja v_i um autovetor generalizado de ordem i, $1 \leq i \leq m$. Então $(A - \lambda I)^i v_i = 0$, por definição. Multiplicando ambos os lados da igualdade anterior por $(A - \lambda I)^{m-i}$, temos

$$(A - \lambda I)^{m-i}(A - \lambda I)^i v_i = (A - \lambda I)^{m-i} 0 \implies (A - \lambda I)^m v_i = 0 \implies v_i \in \mathscr{N}(A - \lambda I)^m.$$

Cadeia de autovetores generalizados

Seja v_m um autovetor generalizado de ordem m associado ao autovalor λ, i.e.,

$$(A - \lambda I)^m v_m = 0, \text{ com } (A - \lambda I)^{m-1} v_m \neq 0.$$

Seja $v_{m-1} = (A - \lambda I)v_m$. Então

$$(A - \lambda I)^{m-1} v_{m-1} = (A - \lambda I)^{m-1}(A - \lambda I)v_m = (A - \lambda I)^m v_m = 0, \text{ com}$$
$$(A - \lambda I)^{m-2} v_{m-1} = (A - \lambda I)^{m-2}(A - \lambda I)v_m = (A - \lambda I)^{m-1} v_m \neq 0.$$

Assim, v_{m-1} é autovetor generalizado de ordem $m-1$ associado ao autovalor λ. Procedemos indutivamente construindo uma *cadeia de autovetores generalizados*

$$\{v_m, v_{m-1}, \cdots, v_2, v_1\},$$

tal que $v_j = (A - \lambda I)v_{j+1}$, onde $j = m-1, \cdots, 1$.

Proposição 9.3 A cadeia de autovetores generalizados de ordem menor ou igual a m, associados a um autovalor λ, é LI.

Demonstração. Considere a cadeia de autovetores generalizados

$$\{v_m, v_{m-1}, \cdots, v_2, v_1\},$$

tal que $v_j = (A-\lambda I)v_{j+1}$, onde $j = m-1, \cdots, 1$. Temos que se

$$a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m = 0, \tag{9.2}$$

então aplicando $(A-\lambda I)^{m-1}$ a ambos os lados da igualdade, temos

$$\begin{aligned} a_1(A-\lambda I)^{m-1}v_1 + \cdots + a_{m-1}(A-\lambda I)^{m-1}v_{m-1} + a_m(A-\lambda I)^{m-1}v_m &= 0 \implies \\ a_m(A-\lambda I)^{m-1}v_m &= 0, \end{aligned}$$

o que implica que $a_m = 0$, pois $(A-\lambda I)^{m-1}v_m \neq 0$. Portanto, a equação 9.2 se resume a

$$a_1 v_1 + \cdots + a_{m-1}v_{m-1} = 0.$$

Agora, aplicamos $(A-\lambda I)^{m-2}$ a ambos os lados da iguadade acima, e obtemos que $a_{m-1} = 0$. Procedendo recursivamente, obtemos que $a_1 = \cdots = a_m = 0$, e isso mostra que a cadeia de autovetores generalizados de ordem m é LI. ■

▪ **Exemplo 9.19** Suponha

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

encontre uma matriz M tal que $M^{-1}AM$ esteja na forma canônica de Jordan.

Achamos os autovalores de A:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = \det(A-\lambda I) &= \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (1-\lambda)^2(2-\lambda). \end{aligned}$$

Temos assim que os autovalores de A são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$, onde $m_a(\lambda_1) = 2$ e $m_a(\lambda_2) = 1$. Vamos achar os autoespaços

- Para $\lambda_1 = 1$, temos

$$\begin{aligned} (A-\lambda I)v = 0 \implies & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \implies & \begin{cases} y+2z = 0 \\ 3z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Portanto, o autoespaço associado a λ_1 é $V_1 = \{(x,0,0); x \in \mathbb{C}\} = [(1,0,0)]$. Daí, $m_g(\lambda_1) = 1$. Daqui já sabemos que a matriz A não diagonalizável, pois $m_a(1) \neq m_g(1)$. Assim, para construir a matriz M, devemos encontrar o autoespaço generalizado. Como $m_a(1) = 2$ então o autoespaço generalizado deverá ter dois autovetores generalizados. Um já temos, é o vetor $v_1 = (1,0,0)$. Por definição, temos que o autovetor generalizado v_2, associado a λ_1 é tal que $v_1 = (A - \lambda I)v_2$. Portanto,

$$(A-\lambda I)v_2 = v_1 \implies \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\implies \begin{cases} y+2z=1 \\ 3z=0 \\ z=0 \end{cases} \implies \begin{cases} y=1 \\ z=0 \end{cases}.$$

Note que x é uma variável livre. Tomando $x = 0$ temos o autovetor generalizado $v_2 = (0,1,0)$. Portanto, uma cadeia de autovetores generalizados associados a λ_1 é $\{(0,1,0),(1,0,0)\}$.

- Para $\lambda_2 = 2$, temos

$$(A-\lambda I)v = 0 \implies \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\implies \begin{cases} -x+y+2z=0 \\ -y+3z=0 \end{cases} \implies \begin{cases} x=5z \\ y=3z \end{cases}.$$

Logo, o autoespaço associado a λ_2 é $V_2 = [(5,3,1)]$.
Logo, a matriz M é dada por

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

cuja inversa é

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, a matriz de Jordan é

$$\begin{aligned} J = M^{-1}AM &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 10 \\ 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Se tomarmos a matriz M como

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

então a sua inversa é

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Neste caso, a matriz de Jordan é

$$J = M^{-1}AM = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

■

■ **Exemplo 9.20** Dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 12 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Os autovalores são: $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 6$ tais que $m_a(-1) = m_a(6) = 1$ e $m_a(1) = 2$ (vimos isso no Exemplo 8 da Aula 17). Além disso, já calculamos que $m_g(1) = 1$. Temos daí que a forma canônica de Jordan para a matriz A é a matriz (Aula 18)

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Portanto, vamos encontrar os autovetores generalizados associados a λ_2. Já sabemos que $V_1 = [(0,1,0,-1)]$ é o autoespaço associado a λ_2. Seja $v_1 = (0,1,0,-1)$ o autovetor ordinário associado a λ_2, então o autovetor generalizado v_2 é tal que $v_1 = (A - \lambda_2 I)v_2$, i.e.,

$$(A - \lambda_2 I)v_2 = v_1 \implies \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 12 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\implies \begin{cases} x + z = 0 \\ y + t = 1 \\ 12x + 2z = 0 \\ -y - t = -1 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} x = z = 0 \\ t = 1 - y \end{cases}.$$

Portanto, um autovetor generalizado é $v_2 = (0,1,0,0)$. Portanto, uma cadeia de autovetores generalizados associados a $\lambda_2 = 1$ é

$$\{(0,1,0,-1),(0,1,0,0)\}.$$

Vamos achar os autoespaços V_{-1} e V_6.

Para $\lambda_1 = -1$, temos

$$(A+I)v = 0 \implies \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 12 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\implies \begin{cases} 3x+z=0 \\ 3y+t=0 \\ 12x+4z=0 \\ -y+t=0 \end{cases} \implies \begin{cases} z=-3x \\ y=t=0 \end{cases}.$$

Portanto, $V_{-1} = [(1,0,-3,0)]$.

Para $\lambda_3 = 6$, temos

$$(A-6I)v = 0 \implies \begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \\ 12 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\implies \begin{cases} -4x+z=0 \\ -4y+t=0 \\ 12x-3z=0 \\ -y-6t=0 \end{cases} \implies \begin{cases} z=4x \\ y=t=0 \end{cases}.$$

Portanto, $V_6 = [(1,0,4,0)]$.

Logo, a matriz M é tal que

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

cuja inversa é

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{7} & 0 & -\frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \frac{3}{7} & 0 & \frac{1}{7} & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
J = M^{-1}AM &= \begin{bmatrix} \frac{4}{7} & 0 & -\frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \frac{3}{7} & 0 & \frac{1}{7} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 12 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{4}{7} & 0 & -\frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \frac{3}{7} & 0 & \frac{1}{7} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 24 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

■

Roteiro para achar a matriz M tal que $M^{-1}AM$ esteja na forma canônica de Jordan.

- Ache os autovalores $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ de A;
- Para cada autovalor λ_i calcule $m_a(\lambda_i)$ e $m_g(\lambda_i)$;
- Para autovalores λ_i tais que $m_g(\lambda_i) = m_a(\lambda_i)$, defina a cadeia de autovetores generalizados como o autoespaço associado a λ_i, i.e., faça $C_{\lambda_i} = V_{\lambda_i}$;
- Para autovalores λ_i tais que $m_g(\lambda_i) < m_a(\lambda_i)$, calcule a sua cadeia de autovetores generalizados construindo a matriz

$$C_{\lambda_i} = \begin{bmatrix} v^{\lambda_i}_{m_a(\lambda_i)} & v^{\lambda_i}_{m_a(\lambda_i)-1} & \cdots & v^{\lambda_i}_1 \end{bmatrix};$$

- A matriz M é dada por

$$M = \begin{bmatrix} C_{\lambda_1} & C_{\lambda_2} & \cdots & C_{\lambda_k} \end{bmatrix}.$$

9.4 Exercícios

1. Para cada matriz A abaixo:
   i. Verifique que A é diagonalizável.
   ii. Ache a matriz diagonal de A.
   iii. Encontre a matriz que diagonaliza A.

   a. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

   b. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

   c. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

   d. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

e. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

f. $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

2. As matrizes a seguir são diagonalizáveis? Justifique.

   a. A matriz real $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

   b. A matriz complexa $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

3. Mostre que as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ são semelhantes.

4. Dada a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x,y,z) = (-x+2y+2z, 2x+2y+2z, -3x-6y-6z).$$

   Determine:
   a. A matriz de T.
   b. O polinômio característico e os autovalores de T.
   c. Os autoespaços associados aos autovalores de T.
   d. As multiplicidades algébricas e geométricas de cada um dos autovalores de T.
   e. O operador T é diagonalizável? Justifique.
   f. Se T for diagonalizável, encontre a matriz M que diagonaliza T. Caso contrário, encontre a forma de Jordan.

5. Para cada uma das seguintes matrizes, determine a forma canônica de Jordan J e uma matriz M invertível tais que $M^{-1}AM = J$.

   a. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

   b. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

6. Mostre que se A é diagonalizável então seu determinante é o produto de seus autovalores.

7. Seja A uma matriz diagonalizável. Mostre que existe uma matriz invertível M tal que $A^n = MD^nM^{-1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

8. Calcule A^{10} onde
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

9. Encontre A^n onde:

a. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

b. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

c. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

10. Espaços com produto interno

10.1 Espaços euclidianos

Seja V um espaço vetorial real. Um produto interno sobre V é uma aplicação que associa a cada par (u,v) em $V \times V$ um número real $\langle u,v\rangle$ satisfazendo as seguintes propriedades:

(i) Bilinearidade:

$$\langle u+v,w\rangle = \langle u,w\rangle + \langle v,w\rangle, \quad \langle u,v+w\rangle = \langle u,v\rangle + \langle u,w\rangle,$$

para todo $u,v,w \in V$ e

$$\langle \alpha u,v\rangle = \alpha\langle u,v\rangle, \quad \langle u,\beta v\rangle = \beta\langle u,v\rangle,$$

para todo $u,v \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

(ii) Comutatividade: $\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle$, para todo $u,v \in V$.

(iii) Positividade: $\langle u,u\rangle > 0$ se $u \neq 0$.

Proposição 10.1 Se $\langle u,v\rangle = 0$ para todo $v \in V$ então $u = 0$.

Demonstração. De fato, se $u \neq 0$ e tomando $u = v$ temos $\langle u,v\rangle = 0$, o que contraria a propriedade da positividade. ■

▪ **Exemplo 10.1** O produto interno usual de $\mathbb{R}^2$ é definido pela expressão:

$$\langle (x,y),(a,b)\rangle = ax+by.$$

▪

▪ **Exemplo 10.2** De forma similar, o produto interno usual de $\mathbb{R}^3$ é definido pela expressão:

$$\langle (x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)\rangle = x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

▪

▪ **Exemplo 10.3** Sejam $(x,y,z),(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Definimos

$$\langle (x,y,z),(a,b,c)\rangle = \frac{ax}{2} + \frac{by}{3} + \frac{cz}{4}.$$

Mostre que a expressão acima define um produto interno.

Para a expressão acima ser produto interno, ela deve gozar das propriedades da definição. Sejam $u = (x_1,y_1,z_1), v = (x_2,y_2,z_2)$ e $w = (x_3,y_3,z_3)$, $\alpha \in \mathbb{R}$:

(i)

$$\begin{aligned}
\langle u+v,w\rangle &= \langle (x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2),(x_3,y_3,z_3)\rangle \\
&= \langle (x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2),(x_3,y_3,z_3)\rangle \\
&= \frac{(x_1+x_2)x_3}{2} + \frac{(y_1+y_2)y_3}{3} + \frac{(z_1+z_2)z_3}{4} \\
&= \left(\frac{x_1x_3}{2} + \frac{y_1y_3}{3} + \frac{z_1z_3}{4}\right) + \left(\frac{x_2x_3}{2} + \frac{y_2y_3}{3} + \frac{z_2z_3}{4}\right) \\
&= \langle (x_1,y_1,z_1),(x_3,y_3,z_3)\rangle + \langle (x_2,y_2,z_2),(x_3,y_3,z_3)\rangle \\
&= \langle u,w\rangle + \langle v,w\rangle;
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\langle \alpha u,v\rangle &= \langle \alpha(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)\rangle \\
&= \langle (\alpha x_1,\alpha y_1,\alpha z_1),(x_2,y_2,z_2)\rangle \\
&= \frac{(\alpha x_1)x_2}{2} + \frac{(\alpha y_1)y_2}{3} + \frac{(\alpha z_1)z_2}{4} \\
&= \alpha\left(\frac{x_1x_2}{2} + \frac{y_1y_2}{3} + \frac{z_1z_2}{4}\right) \\
&= \alpha\langle (x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)\rangle \\
&= \alpha\langle u,v\rangle;
\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
\langle u,v\rangle &= \langle (x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)\rangle \\
&= \frac{x_1x_2}{2} + \frac{y_1y_2}{3} + \frac{z_1z_2}{4} \\
&= \frac{x_2x_1}{2} + \frac{y_2y_1}{3} + \frac{z_2z_1}{4} \\
&= \langle (x_2,y_2,z_2),(x_1,y_1,z_1)\rangle \\
&= \langle v,u\rangle;
\end{aligned}$$

(iv) Suponha que $u \neq 0$. Então $\langle u,u\rangle > 0$ se $u \neq 0$. De fato,

$$\langle u,u\rangle = \langle (x_1,y_1,z_1),(x_1,y_1,z_1)\rangle = \frac{x_1^2}{2} + \frac{y_1^2}{3} + \frac{z_1^2}{4} > 0.$$

Logo, a expressão acima é um produto interno. ▪

▪ **Exemplo 10.4** Mostre que se $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ então a expressão

$$\langle A, B\rangle = tr(B^t A)$$

define um produto interno em $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

A notação $tr(B^t A)$ representa a soma dos elementos da diagonal principal da matriz $B^t A$. Note que a função traço é uma transformação linear. De fato, seja $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Basta definir a função $tr : \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ por $tr(A) = a_{11} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Sejam $A, B, C \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

(i)

$$\begin{aligned} \langle A+B, C\rangle &= tr(C^t(A+B)) = tr(C^tA + C^tB) = tr(C^tA) + tr(C^tB) \\ &= \langle A, C\rangle + \langle B, C\rangle; \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \langle \alpha A, B\rangle &= tr(B^t(\alpha A)) = tr(\alpha(B^tA)) = \alpha tr(B^tA) \\ &= \alpha\langle A, B\rangle; \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} \langle A, B\rangle &= tr(B^tA) = tr((B^tA)^t) = tr(A^t(B^t)^t) = tr(A^tB) \\ &= \langle B, A\rangle; \end{aligned}$$

pois

$$tr(X) = tr(X^t), (XY)^t = Y^tX^t \text{ e } (X^t)^t = X.$$

(iv)

$$\langle A, A\rangle = tr(A^tA) > 0.$$

Pois, sendo $A = (a_{ij})_n$, temos que os elementos da diagonal principal de A^tA sempre serão escritos como a soma de quadrados, da forma:

$$diag(A^tA) = (a_{11}^2 + a_{12}^2 + \cdots + a_{1n}^2, a_{21}^2 + a_{22}^2 + \cdots + a_{2n}^2, \cdots, a_{n1}^2 + a_{n2}^2 + \cdots + a_{nn}^2).$$

Logo, o traço de A^tA é positivo.

Provam-se as duas primeiras propriedades de uma só vez:

$$\begin{aligned} \langle A+B, \alpha C\rangle &= tr(\alpha C^t(A+B)) \\ &= tr(\alpha C^tA + \alpha C^tB) \\ &= \alpha tr(C^tA) + \alpha tr(C^tB) \\ &= \alpha(tr(C^tA) + tr(C^tB)) \\ &= \alpha\left(\langle A, C\rangle + \langle B, C\rangle\right). \end{aligned}$$

Logo, o produto definido acima é um produto interno. ▪

O espaço vetorial V munido de produto interno é chamado de *espaço euclidiano*.

O produto interno também é chamado de produto escalar.

10.1.1 Espaços hermitianos

Seja V um espaço vetorial complexo. O produto interno hermitiano é definido como uma função $V \times V \to \mathbb{C}$ que associa a cada par de vetores (u,v) um número complexo de tal modo que as seguintes condições sejas cumpridas:

1. $\langle u,v\rangle = \overline{\langle v,u\rangle}$. (Lembre que se $z = a+bi \in \mathbb{C}$ então $\overline{z} = a-bi$ é o conjugado de z.)
2. $\langle u+v,w\rangle = \langle u,w\rangle + \langle v,w\rangle$.
3. $\langle \zeta u,v\rangle = \zeta\langle u,v\rangle$, $\zeta \in \mathbb{C}$.
4. $\langle u,u\rangle > 0$ se $u \neq 0$.

Note que usando as propriedades 1. e 3., temos

$$\langle u,\zeta v\rangle = \overline{\langle \zeta v,u\rangle} = \overline{\zeta\langle v,u\rangle} = \overline{\zeta}\langle u,v\rangle.$$

Temos também que

$$\begin{aligned}\langle u,v+w\rangle &= \overline{\langle v+w,u\rangle}\\ &= \overline{\langle v,u\rangle + \langle w,u\rangle}\\ &= \overline{\langle v,u\rangle} + \overline{\langle w,u\rangle}\\ &= \langle u,v\rangle + \langle u,w\rangle.\end{aligned}$$

Desta forma, o produto interno hermitiano é chamado de *sesquilinear*, pois é linear na primeira variável e antilinear na segunda variável.

▪ **Exemplo 10.5** Sejam $u = (u_1,\cdots,u_n), v = (v_1,\cdots,v_n) \in \mathbb{C}^n$. A expressão

$$\langle u,v\rangle = u_1\overline{v_1} + \cdots + u_n\overline{v_n},$$

define um produto interno hermitiano canônico.

Devemos verificar se todas as condições para o produto interno hermitiano são cumpridas. Sejam $u = (u_1,\cdots,u_n), v = (v_1,\cdots,v_n), w = (w_1,\cdots,w_n) \in \mathbb{C}^n$ e $\eta \in \mathbb{C}$, então

1.

$$\begin{aligned}\langle u,v\rangle &= u_1\overline{v_1} + \cdots + u_n\overline{v_n}\\ &= \overline{\overline{u_1}v_1} + \cdots + \overline{\overline{u_n}v_n}\\ &= \overline{\overline{u_1}v_1 + \cdots + \overline{u_n}v_n}\\ &= \overline{v_1\overline{u_1} + \cdots + v_n\overline{u_n}}\\ &= \overline{\langle v,u\rangle}.\end{aligned}$$

2. Faça o restante como exercício.

▪

O produto hermitiano do Exemplo 10.5 é o produto interno canônico de $\mathbb{C}^n$.

Um espaço vetorial complexo munido de um produto hermitiano é chamado de *espaço hermitiano*.

10.2 Norma

Seja V um espaço euclidiano. Define-se, para cada $u \in V$, o número $||u|| = \sqrt{\langle u,u\rangle}$ (ou equivalentemente $||u||^2 = \langle u,u\rangle$). Este valor é chamado de *norma* de u.

Propriedades da norma: Seja V um $\mathbb{K}$-espaço euclidiano (ou hermitiano). Sejam $u,v \in V$ e $\alpha \in \mathbb{K}$ quaisquer, então valem as seguintes propriedades:

1. $||\alpha u|| = |\alpha|||u||$;
2. $||u|| \geq 0$, sendo que $||u|| = 0$ se, e somente se, $u = 0$;
3. $|\langle u,v\rangle| \leq ||u||||v||$ (desigualdade de Cauchy-Schwarz);
4. $||u+v|| \leq ||u|| + ||v||$ (desigualdade triangular).

Demonstração. 1. Caso real:

$$||\alpha u|| = \sqrt{\langle \alpha u, \alpha u\rangle} = \sqrt{\alpha^2\langle u,u\rangle} = \sqrt{\alpha^2}\sqrt{\langle u,u\rangle} = |\alpha|||u||.$$

Caso complexo:

$$||\alpha u|| = \sqrt{\langle \alpha u, \alpha u\rangle} = \sqrt{\alpha\overline{\alpha}\langle u,u\rangle} = \sqrt{|\alpha|^2}\sqrt{\langle u,u\rangle} = |\alpha|||u||.$$

2. Imediato, pela definição de norma.
3. Façamos o caso complexo. O caso em que u ou v são vetores nulos é imediato. Sejam u,v vetores não nulos do $\mathbb{C}$-espaço vetorial V e $\lambda \in \mathbb{C}$. Então, temos que $||u-\lambda v||^2 \geq 0$. Portanto,

$$\begin{aligned} ||u-\lambda v||^2 \geq 0 &\implies \langle u-\lambda v, u-\lambda v\rangle \geq 0 \\ &\implies \langle u,u\rangle - \overline{\lambda}\langle u,v\rangle - \lambda\langle v,u\rangle + \lambda\overline{\lambda}\langle v,v\rangle \geq 0 \\ &\implies ||u||^2 - \overline{\lambda}\langle u,v\rangle - \lambda\langle v,u\rangle + |\lambda|^2||v||^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Tome, em particular, $\lambda = \dfrac{\langle u,v\rangle}{\langle v,v\rangle} = \dfrac{\langle u,v\rangle}{||v||^2}$. Então,

$$\begin{aligned} ||u-\lambda v||^2 \geq 0 &\implies ||u||^2 - \frac{\overline{\langle u,v\rangle}}{||v||^2}\langle u,v\rangle - \frac{\langle u,v\rangle}{||v||^2}\langle v,u\rangle + \frac{|\langle u,v\rangle|^2}{||v||^4}||v||^2 \geq 0 \\ &\implies ||u||^2 - \frac{\overline{\langle u,v\rangle}}{||v||^2}\langle u,v\rangle - \frac{\langle u,v\rangle}{||v||^2}\overline{\langle u,v\rangle} + \frac{|\langle u,v\rangle|^2}{||v||^2} \geq 0 \\ &\implies ||u||^2 - \frac{|\langle u,v\rangle|^2}{||v||^2} - \frac{|\langle u,v\rangle|^2}{||v||^2} + \frac{|\langle u,v\rangle|^2}{||v||^2} \geq 0 \\ &\implies ||u||^2 - \frac{|\langle u,v\rangle|^2}{||v||^2} \geq 0 \\ &\implies |\langle u,v\rangle| \leq ||u||||v||. \end{aligned}$$

O caso real é análogo.

4. Note que

$$\begin{aligned} ||u+v||^2 &= \langle u+v, u+v\rangle \\ &= \langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle \\ &= ||u||^2 + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle + ||v||^2 \\ &\leq ||u||^2 + ||u||||v|| + ||v||||u|| + ||v||^2 \\ &= ||u||^2 + 2||u||||v|| + ||v||^2 \\ &= (||u|| + ||v||)^2. \end{aligned}$$

Basta extrair a raiz quadrada em ambos os lados para obtermos a desigualdade triangular. ■

Vetores unitários: É todo vetor cuja norma é igual a 1. Note que o vetor $(1,1) \in \mathbb{R}^2$, com norma usual, não é um vetor unitário, uma vez que sua norma é

$$||(1,1)|| = \sqrt{\langle (1,1),(1,1)\rangle} = \sqrt{2} \neq 1.$$

Mas existe uma forma de encontrar um vetor unitário a partir do vetor dado. Em geometria analítica, chamamos esse vetor de *versor*. Assim, o versor de um vetor qualquer u é o vetor v dado por:

$$v = \frac{u}{||u||}.$$

No nosso exemplo, o vetor

$$v = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$$

é unitário.

A igualdade a seguir é conhecida como *identidade do paralelogramo*:

$$||u+v||^2 + ||u-v||^2 = 2(||u||^2 + ||v||^2).$$

Vamos demonstrá-la. Começamos desenvolvendo o lado esquerdo da igualdade:

$$\begin{aligned} ||u+v||^2 + ||u-v||^2 &= \langle u+v, u+v\rangle + \langle u-v, u-v\rangle \\ &= \langle u, u+v\rangle + \langle v, u+v\rangle + \langle u, u-v\rangle + \langle -v, u-v\rangle \\ &= \langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle + \langle u,u\rangle + \langle u,-v\rangle + \langle -v,u\rangle + \langle -v,-v\rangle \\ &= \langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle + \langle u,u\rangle - \langle u,v\rangle - \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle \\ &= \langle u,u\rangle + \langle v,v\rangle + \langle u,u\rangle + \langle v,v\rangle \\ &= 2\langle u,u\rangle + 2\langle v,v\rangle \\ &= 2(||u||^2 + ||v||^2). \end{aligned}$$

10.3 Distância entre dois vetores

Num espaço euclidiano V, definimos a distância entre dois vetores u e v como

$$d(u,v) = ||u-v||.$$

Portanto, todas as propriedades para a distância são herdadas das propriedades da norma.
Norma: $||u|| = \sqrt{\langle u,u\rangle} \Rightarrow ||u||^2 = \langle u,u\rangle$.

▪ **Exemplo 10.6** Calcular a distância entre os vetores $u = (2,1)$ e $v = (1,3)$:

$$d(u,v) = ||u-v|| = ||(2,1)-(1,3)|| = ||(1,-2)|| = \sqrt{\langle (1,-2),(1,-2)\rangle} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} \text{ u.m.}$$

▪

▪ **Exemplo 10.7** Considere o produto interno para as matrizes da forma

$$\langle A,B\rangle = tr(B^tA).$$

Desta forma, se considerarmos as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, podemos calcular a distância entre estas matrizes considerando o produto interno definido anteriormente:

$$\begin{aligned} d(A,B) &= ||A-B|| = \left|\left|\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\right|\right| = \sqrt{\left\langle \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle} \\ &= \sqrt{tr\left(\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\right)} \\ &= \sqrt{tr\left(\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\right)} \\ &= \sqrt{tr\begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}} \\ &= \sqrt{13} \text{ u.m.} \end{aligned}$$

▪

10.4 Ângulo entre dois vetores

Seja V um espaço euclidiano. Da desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos que

$$|\langle u,v\rangle| \leq ||u||||v||.$$

Usando a propriedade da desigualdade do valor absoluto

$$|x| < a \iff -a < x < a,$$

tem-se que

$$-||u||||v|| \leq \langle u,v\rangle \leq ||u||||v||.$$

Isto implica que

$$-1 \leq \frac{\langle u,v\rangle}{||u||||v||} \leq 1.$$

Portanto, para quaisquer dois vetores u e v, existe um número real $\theta \in [0,\pi]$ tal que

$$\cos\theta = \frac{\langle u,v\rangle}{||u||||v||}.$$

▪ **Exemplo 10.8** No caso canônico, ou seja, onde $u=(1,0)$ e $v=(0,1)$, temos, pelo produto interno usual, que

$$\langle u,v\rangle = \langle (1,0),(0,1)\rangle = 1\cdot 0 + 0\cdot 1 = 0.$$

Temos também que $||u|| = ||v|| = 1$. Portanto, calculamos o ângulo de inclinação entre os vetores u e v:

$$\cos\theta = \frac{0}{1\cdot 1} = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}.$$

Como o ângulo entre os vetores u e v é de 90 graus e eles são unitários, diz-se que o conjunto formado por eles é *ortonormal*. ▪

Definição 10.1 Conjunto ortonormal: é o conjunto $\{v_1,\cdots,v_n\}$ formado por vetores unitários e dois a dois ortogonais, i.e.,

$$||v_i|| = 1 \quad e \quad \langle v_i,v_j\rangle = \begin{cases} 0, \text{ se } i\neq j \\ 1, \text{ se } i=j \end{cases}.$$

▪ **Exemplo 10.9** Consideremos agora o exemplo dado anteriormente sobre matrizes e calculamos o ângulo entre as matrizes A e B. Neste caso,

$$\cos\theta = \frac{\langle A,B\rangle}{||A||||B||}.$$

Temos,

$$\begin{aligned} \langle A,B\rangle &= tr(B^tA) = tr\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\right) \\ &= tr\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\right) \\ &= tr\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = 4. \end{aligned}$$

A norma da matriz A é

$$\begin{aligned} ||A|| &= \sqrt{\langle A,A\rangle} = \sqrt{tr(A^tA)} \\ &= \sqrt{tr\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\right)} \\ &= \sqrt{tr\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 10 \end{bmatrix}} = \sqrt{15}, \end{aligned}$$

e a norma da matriz B é

$$\begin{aligned} ||B|| &= \sqrt{\langle B,B\rangle} = \sqrt{tr(B^tB)} = \sqrt{tr(B^2)} \\ &= \sqrt{tr\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\right)} \\ &= \sqrt{tr\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}} = \sqrt{6}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\cos\theta = \frac{\langle A,B\rangle}{||A||||B||} = \frac{4}{\sqrt{15}\sqrt{6}} = \frac{4}{3\sqrt{10}} \Rightarrow \theta = \arccos\frac{4}{3\sqrt{10}}.$$

■

10.5 Conjuntos ortogonais e ortonormais

Diz-se que dois vetores são ortogonais se o produto interno entre eles é nulo. Ou seja, se u e v são ortogonais então $\langle u,v\rangle = 0$.

Um conjunto de vetores diz-se ortogonal se todos os seus vetores são dois a dois ortogonais. Além disso, se tais vetores são unitários diz-se que o *conjunto é ortonormal*. Em outras palavras, tome o conjunto de vetores $\{v_1,\cdots,v_n\}$. Se esse conjunto for ortonormal, temos que todos os vetores são unitários, i.e., $||v_1|| = \cdots = ||v_n|| = 1$, e os vetores são dois a dois ortogonais, ou seja,

$$\langle v_i, v_j\rangle = 0, \text{ se } i \neq j.$$

Note que, uma vez que os vetores são unitários, então $\langle v_i, v_i\rangle = 1$.

■ **Exemplo 10.10**
1. A base canônica de um espaço vetorial é um conjunto ortonormal.
2. A base $C = \{(1,0),(0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$, considerando o produto interno usual, é uma base ortonormal.
3. A base canônica $C = \{e_1,\cdots,e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$, onde e_i é o vetor cuja i-ésima coordenada é igual a 1 e todas as outras coordenadas é igual a 0, para cada $i = 1,\cdots,n$, é uma base ortonormal.

■

Proposição 10.2 Sejam V um espaço euclidiano e $U = [u_1, ..., u_n]$ o subespaço gerado por um conjunto ortonormal $S = \{u_1, ..., u_n\}$. Entao, para qualquer $u \in U$ o vetor dado por

$$v = u - \langle u, u_1\rangle u_1 - \langle u, u_2\rangle u_2 - \cdots - \langle u, u_n\rangle u_n$$

é ortogonal a todo vetor de U.

Demonstração. Seja $w \in U$ um vetor qualquer. Então existem números reais $a_1, \cdots, a_n$ tais que $w = a_1u_1 + \cdots + a_nu_n$. O produto interno entre o vetor v e qualquer vetor w de U é dado por:

$$\begin{aligned}
\langle w, v\rangle &= \langle a_1u_1 + \cdots + a_nu_n, u - \langle u, u_1\rangle u_1 - \cdots - \langle u, u_n\rangle u_n\rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_iu_i, u - \sum_{j=1}^{n} \langle u, u_i\rangle u_i \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_iu_i, u \right\rangle - \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_iu_i, \sum_{j=1}^{n} \langle u, u_j\rangle u_j \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i \langle u_i, u\rangle - \sum_{i=1}^{n} a_i \left\langle u_i, \sum_{j=1}^{n} \langle u, u_j\rangle u_j \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i \langle u_i, u\rangle - \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{n} \langle u, u_j\rangle \langle u_i, u_j\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i \langle u_i, u\rangle - \sum_{i=1}^{n} a_i \langle u, u_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i \langle u_i, u\rangle - \sum_{i=1}^{n} a_i \langle u_i, u\rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Logo, w é ortogonal a v. ■

10.6 Complemento ortogonal

Seja U um subespaço vetorial de V, munido de um produto interno, define-se o complemento ortogonal de U como o conjunto formado por todos os vetores que são ortogonais a todos os vetores de U:

$$U^{\perp} = \{v \in V : \langle u, v\rangle = 0, \text{ para todo } u \in U\} \subset V.$$

A notação $U^{\perp}$ pode ser lida como "o complemento ortogonal de U".

Proposição 10.3 O complemento ortogonal de U é um subespaço vetorial de V.

Demonstração. De fato, sejam $v_1, v_2 \in U^\perp$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Então, para todo $u \in U$, temos

$$\langle u, \alpha v_1 + v_2 \rangle = \langle u, \alpha v_1 \rangle + \langle u, v_2 \rangle = \overline{\alpha}\langle u, v_1 \rangle + \langle u, v_2 \rangle = \overline{\alpha}0 + 0 = 0.$$

Isso mostra que o vetor $\alpha v_1 + v_2 \in U^\perp$, e portanto $U^\perp$ é um subespaço vetorial de V. ■

▪ **Exemplo 10.11** Encontre o complemento ortogonal de $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y=z\}$.

Usamos o sequinte raciocínio: se um vetor é ortogonal aos elementos da base de um espaço vetorial U então este vetor é ortogonal a todo o espaço vetorial U.

Neste exemplo, o conjunto $\{(1,0,1),(0,1,1)\}$ é uma base para V. Portanto, qualquer vetor (x,y,z) do complemento ortogonal de V deve ser ortogonal, simultaneamente, aos vetores de base de V:

$$\begin{cases} \langle (x,y,z),(1,0,1)\rangle = 0 \\ \langle (x,y,z),(0,1,1)\rangle = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+z=0 \\ y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x \\ z=-x \end{cases}.$$

Portanto, todos os vetores ortogonais ao espaço V são da forma $(x,x,-x)$. De fato, seja $(a,b,c) \in V$ e $(x,x,-x)$, então

$$\langle (a,b,c),(x,x,-x)\rangle = \langle (a,b,a+b),(x,x,-x)\rangle = ax+bx-(a+b)x = 0.$$

Logo, $V^\perp = \{(x,x,-x) : x \in \mathbb{R}\} = [(1,1,-1)]$. ▪

Observe, da Geometria Analítica, que o espaço V é um plano com equação $x+y-z=0$. O vetor normal a esse plano é o vetor $(1,1,-1)$ (dada a equação do plano $ax+by+cz+d=0$ temos que o vetor (a,b,c) é ortogonal ao plano).

Note que também que $V \oplus V^\perp = \mathbb{R}^3$. De fato, o conjunto formado pela união das bases de V e $V^\perp$, i.e., $\{(1,0,1),(0,1,1),(1,1,-1)\}$ é um conjunto LI. Assim, esse conjunto é uma base de $\mathbb{R}^3$. Por outro lado, $V \cap V^\perp = \{0\}$, pois o único vetor que é ortogonal a si mesmo é o vetor nulo.

▪ **Exemplo 10.12** Calcular o complemento ortogonal de $U = [(1,1,-1)]$.

Já vimos que basta achar os vetores que são orgonais aos vetores da base de V. Ou seja, devemos encontrar vetores (x,y,z) tais que $\langle (x,y,z),(1,1,-1)\rangle = 0$. Isto implica que

$$x+y-z=0 \implies z=x+y.$$

Portanto,

$$U^\perp = \{(x,y,z); z=x+y\}.$$

Note que $V = U^\perp = (V^\perp)^\perp$. ▪

10.7 Processo de ortonormalização de Gram-Schmidt

Dada uma base qualquer $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ de um espaço vetorial V, munido de produto interno, podemos encontrar uma base ortonormal $\{u_1, \cdots, u_n\}$ de V, onde $\langle u_i, u_j \rangle = 0$, se $i \neq j$, e $\langle u_i, u_i \rangle = 1 = ||u_i||$, para todo $i, j = 1, \cdots, n$.

Proposição 10.4 Sejam V um espaço euclidiano e $U = [u_1, ..., u_n]$ o subespaço gerado por um conjunto ortonormal $S = \{u_1, ..., u_n\}$. Então, para qualquer $u \in U$ o vetor dado por

$$v = u - \langle u, u_1 \rangle u_1 - \langle u, u_2 \rangle u_2 - \cdots - \langle u, u_n \rangle u_n$$

é ortogonal a todo vetor de U.

Demonstração. Seja $w \in U$ um vetor qualquer. Então existem números reais $a_1, \cdots, a_n$ tais que $w = a_1 u_1 + \cdots + a_n u_n$. O produto interno entre o vetor v e qualquer vetor w de U é dado por:

$$\begin{aligned}
\langle w, v \rangle &= \langle a_1 u_1 + \cdots + a_n u_n, u - \langle u, u_1 \rangle u_1 - \cdots - \langle u, u_n \rangle u_n \rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i u_i, u - \sum_{j=1}^{n} \langle u, u_i \rangle u_i \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i u_i, u \right\rangle - \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i u_i, \sum_{j=1}^{n} \langle u, u_j \rangle u_j \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i \langle u_i, u \rangle - \sum_{i=1}^{n} a_i \left\langle u_i, \sum_{j=1}^{n} \langle u, u_j \rangle u_j \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i \langle u_i, u \rangle - \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{n} \langle u, u_j \rangle \langle u_i, u_j \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i \langle u_i, u \rangle - \sum_{i=1}^{n} a_i \langle u, u_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i \langle u_i, u \rangle - \sum_{i=1}^{n} a_i \langle u_i, u \rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Logo, w é ortogonal a v. ■

Usando a Proposição 10.4, temos um processo para calcular todos os vetores ortogonais entre si e de norma 1, usando a base $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ de um espaço euclidiano V. Este processo é conhecido como o *processo de ortonormalização de Gram-Schmidt*.

10.7.1 Processo de Gram-Schmidt

Passo 1: encontre o primeiro vetor unitário simplesmente calculando o versor do primeiro vetor dado na base de V:

$$u_1 = \frac{v_1}{||v_1||}.$$

Passo 2: a partir daí, usamos a Proposição 10.4 para calcular os próximos vetores em função do vetor u_1:

$$u_2 = \frac{v_2 - \langle v_2, u_1\rangle u_1}{||v_2 - \langle v_2, u_1\rangle u_1||}$$

$$u_3 = \frac{v_3 - \langle v_3, u_1\rangle u_1 - \langle v_3, u_2\rangle u_2}{||v_3 - \langle v_3, u_1\rangle u_1 - \langle v_3, u_2\rangle u_2||}$$

$$\vdots$$

$$u_n = \frac{v_n - \langle v_n, u_1\rangle u_1 - \cdots - \langle v_n, u_{n-1}\rangle u_{n-1}}{||v_n - \langle v_n, u_1\rangle u_1 - \cdots - \langle v_n, u_{n-1}\rangle u_{n-1}||}.$$

Assim, o espaço vetorial V tem uma nova base ortonormal $\{u_1, \cdots, u_n\}$.

■ **Exemplo 10.13** Calcular uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$, a partir da base $\{(1,1),(1,2)\}$.

1. Calcular o versor de $(1,1)$:

$$u_1 = \frac{1}{||(1,1)||}(1,1) = \frac{1}{\sqrt{\langle (1,1),(1,1)\rangle}}(1,1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Uma vez encontrado o primeiro vetor unitário, devemos encontrar um vetor que seja ortogonal a ele.

2. Calcular o vetor u_2. Vamos calcular somente o numerador e depois normalizamos o vetor

$$\begin{aligned} v_2 - \langle v_2, u_1\rangle u_1 &= (1,2) - \left\langle (1,2), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\rangle \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= (1,2) - \frac{3}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= (1,2) - \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) \\ &= \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Agora normalizamos o vetor encontrado:

$$||v_2 - \langle v_2, u_1\rangle u_1|| = \left|\left|\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right|\right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Portanto,

$$u_2 = \frac{v_2 - \langle v_2, u_1\rangle u_1}{||v_2 - \langle v_2, u_1\rangle u_1||} = \frac{1}{||v_2 - \langle v_2, u_1\rangle u_1||}(v_2 - \langle v_2, u_1\rangle u_1) = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Logo, o conjunto $\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$. ▪

▪ **Exemplo 10.14** Encontre um base ortonormal de $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y=z\}$.
O primeiro passo aqui é encontrar uma base para V:

$$\begin{aligned} V &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y=z\} \\ &= \{(x,y,x+y) : x,y\in\mathbb{R}\} \\ &= \{(x,0,x)+(0,y,y) : x,y\in\mathbb{R}\} \\ &= \{x(1,0,1)+y(0,1,1) : x,y\in\mathbb{R}\} \\ &= [(1,0,1),(0,1,1)]. \end{aligned}$$

Como os vetores acima são LI, segue que o conjunto $\{(1,0,1),(0,1,1)\}$ é uma base para V. Vamos ortonormalizar esta base. Seja $v_1=(1,0,1)$ e $v_2=(0,1,1)$. Temos

$$u_1=\frac{1}{||(1,0,1)||}(1,0,1)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Agora encontramos o vetor u_2. Para isso, vamos calcular o numerador e denominador em separado:

$$v_2-\langle v_2,u_1\rangle u_1=(0,1,1)-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=(0,1,1)-\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}\right).$$

Agora, calculamos a norma deste vetor

$$||v_2-\langle v_2,u_1\rangle u_1||=\sqrt{\frac{1}{4}+1+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Agora, calculamos o versor de $v_2-\langle v_2,u_1\rangle u_1$,

$$u_2=\frac{1}{||v_2-\langle v_2,u_1\rangle u_1||}(v_2-\langle v_2,u_1\rangle u_1)=\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}}\left(-\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\frac{2}{3}}\left(-\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}\right).$$

Logo, o conjunto $\{u_1,u_2\}$ é uma base ortonormal de V. ▪

10.8 Exercícios

1. A operação definida por

$$\langle(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)\rangle=2x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$$

é um produto interno em $\mathbb{R}^3$? Justifique.

2. Considere a forma linear

$$\langle (x_1,x_2,x_3,x_4),(y_1,y_2,y_3,y_4)\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_4y_4,$$

onde $(x_1,x_2,x_3,x_4),(y_1,y_2,y_3,y_4) \in \mathbb{R}^4$.
   a. A forma linear acima é um produto interno em $\mathbb{R}^4$? Justifique.
   b. Mostre que a forma linear acima é um produto interno no espaço vetorial

$$V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : t = 0\} = \mathbb{R}^3 \times \{0\}.$$

A forma linear definida nesta questão é conhecida como *pseudo-produto interno de Lorentz*. O espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ munido do pseudo-produto interno de Lorentz é chamado de *espaço de Minkowski*.

3. Considere a transformação $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

   a. Encontre uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de T.
   b. Ortonormalize a base encontrada no item anterior.

4. Sejam $u = (x_1,y_1)$ e $v = (x_2,y_2)$ vetores em $\mathbb{R}^2$. Para quais valores de t a função $\langle \cdot,\cdot \rangle : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $\langle u,v \rangle = x_1x_2 + ty_1y_2$ é um produto interno?

5. Considere o produto interno de $\mathbb{R}^2$ definido como $\langle u,v \rangle = 4x_1x_2 + y_1y_2$, onde $u = (x_1,y_1)$ e $v = (x_2,y_2)$. Mostre que a base $\beta = \{(1,0),(0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ é ortogonal, mas não é ortonormal, segundo este produto interno. Em seguida, ortonormalize a base β.

6. Considere o espaço euclidiano $\mathbb{R}^2$. Sejam $u = (2,1)$ e $v = (1,-1)$ vetores de $\mathbb{R}^2$. Calcule um vetor w tal que $\langle u,w \rangle = 1$ e $\langle v,w \rangle = -1$.

7. Mostre que os vetores $v_1 = (1,-2,3,-4)$, $v_2 = (2,1,-4,-3)$, $v_3 = (-3,4,1,-2)$ e $v_4 = (4,3,2,1)$ formam uma base ortogonal de $\mathbb{R}^4$ com o produto interno euclidiano.

8. Suponha que $\mathbb{R}^3$ está munido com o produto interno $\langle u,v \rangle = x_1x_2 + 2y_1y_2 + 3z_1z_2$, onde $u = (x_1,y_1,z_1)$ e $v = (x_2,y_2,z_2)$. Use o processo de Gram-Schmidt para converter o conjunto $\{(2,1,1),(1,-1,1),(0,2,-1)\}$ em uma base ortonormal.

9. Seja $B = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,2,0)\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$. Use o processo de ortonormalização de Gram-Schmidt para achar uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, em relação ao produto interno usual.

10. Considere o espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual. Decomponha o vetor $u = (5,4,2)$ como uma soma $u = v + w$, onde $v \in V = [(1,0,1),(1,1,1)]$ e $w \in V^{\perp}$.

11. Considere o espaço vetorial $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$.
    a. Mostre que
    $$\langle p(x), q(x)\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$$
    é um produto interno em $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$.
    b. Determine os valores de a tais que o polinômio $p(x) = ax^2 + 1$ seja ortogonal ao polinômio $q(x) = x - 1$.
    c. Determine $||r(x)||$, onde $r(x) = x^2 + x + 1$.
    d. Encontre $V^\perp$, sabendo que $V = [x]$.

12. Considere o espaço vetorial V=$\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{C})$ das funçoes contínuas complexas definidas no intervalo $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$. Mostre que
    $$\langle f(x), g(x)\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$$
    define um produto hermitiano em V.

13. Sejam A e B matrizes do espaço vetorial $\mathbb{M}_2$ munido do produto interno $\langle A, B\rangle = tr(B^t A)$. Exiba uma base ortonormal de $\mathbb{M}_2$, segundo este produto interno, a partir da base
    $$\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right\}.$$

14. Considere o subespaço vetorial de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$:
    $$V = \left\{\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) : x + y + z = w \in \mathbb{R}\right\}.$$
    Determine uma base ortonornal para V e para $V^\perp$.

15. Seja $V \subset \mathbb{R}^3$ o subespaço gerado pelo conjunto $S = \{(1,0,1),(1,1,0)\}$.
    a. Considerando o produto interno usual, calcule uma base para $V^\perp$.
    b. Considerando o produto interno definido no Exercício 1, calcule uma base para $V^\perp$.

16. Mostre que $\{1, \cos x, \cos(2x), \cos(3x), \cdots\}$ é uma base ortogonal no espaço das funções contínuas $\mathscr{C}[0,\pi]$ usando o produto interno
    $$\langle f, g\rangle = \int_0^\pi f(x)g(x)dx.$$
    (Dica: Considere a identidade $2\cos(mx)\cos(nx) = \cos((m+n)x) + \cos((m-n)x)$*).*

17. Suponha que $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ tenha o seguinte produto interno

$$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx.$$

Use o processo de ortonormalização de Gram-Schmidt para ortonormalizar a base $\{1,x,x^2\}$ de $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$.

18. Seja $V = C[a,b]$ o espaço vetorial das funções contínuas definidas no intervalo fechado $[a,b]$. Mostre que $\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$ é um produto interno sobre V.

19. Considere o espaço vetorial $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$. Calcule $||x^2+x+1||$ em relação aos seguintes produtos internos:
    a. $\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$.
    b. $\langle f,g\rangle = f(0)g(0)+f(1)g(1)+f(2)g(2)$.

20. Num espaço vetorial V com produto interno, é verdade que $\langle u,w\rangle = \langle v,w\rangle \implies u = v$? Justifique.

21. Sejam $u = (x_1,y_1,z_1)$ e $v = (x_2,y_2,z_2)$ vetores de $\mathbb{R}^3$. Quais as condições sobre os números reais a, b e c tais que $\langle u,v\rangle = ax_1x_2 + by_1y_2 + cz_1z_2$ seja um produto interno?

22. Seja V um espaço euclidiano. Mostre que $||u|| = ||v|| \iff \langle u+v, u-v\rangle$. Esta propriedade continua válida se V é um espaço hermitiano?

23. Sejam V um espaço euclidiano de dimensão finita e U um subespaço de V. Mostre que $V = U \oplus U^{\perp}$. Vale para o caso hermitiano?

24. Sejam V um espaço euclidiano de dimensão finita e U um subespaço de V. Mostre que $(U^{\perp})^{\perp} = U$. Verifique se vale para o caso hermitiano.

25. Mostre que se u é ortogonal a v então $||u+v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2$.

26. Mostre que $||u+v||^2 - ||u-v||^2 = 4\langle u,v\rangle$.

27. Refaça a demonstração da Proposição 10.4 para o caso em que V é um espaço hermitiano.

11. Operadores autoadjuntos e ortogonais

11.1 Isometria

Definição 11.1 Sejam U e V espaços vetoriais munidos de produto interno. Diz-se que $T : U \to V$ é uma *isometria* se

$$\langle T(u_1), T(u_2)\rangle = \langle u_1, u_2\rangle,$$

para todo $u_1, u_2 \in U$.

O resultado a seguir mostra que uma isometria preserva distâncias e que leva base ortonormal em base ortonormal.

Teorema 11.1 As afirmações a seguir são equivalentes:

1. T é uma isometria;
2. $||T(u)|| = ||u||$;
3. $||T(u) - T(v)|| = ||u - v||$;
4. Se $\{u_1, \cdots, u_n\} \subset U$ é base ortonormal então $\{T(u_1), \cdots, T(u_n)\} \subset V$ é ortonormal.

Demonstração. 1. $\implies$ 2.) Suponha $T : U \to V$ uma isometria. Observe que

$$||T(u)||^2 = \langle T(u), T(u)\rangle = \langle u, u\rangle = ||u||^2.$$

Agora, basta tomar a raiz quadrada em ambos os lados da equação e temos a afirmação.

2 $\implies$ 3) Basta observar que

$$||T(u) - T(v)|| = ||T(u - v)|| = ||u - v||.$$

1 $\implies$ 4) Suponha que $\{u_1, \cdots, u_n\} \subset U$ é ortonormal, temos

– Se $i \neq j$ então:

$$\langle T(u_i), T(u_j)\rangle = \langle u_i, u_j\rangle = 0.$$

– Sendo $i = j$, temos

$$||T(u_i)||^2 = \langle T(u_i), T(u_i)\rangle = \langle u_i, u_i\rangle = ||u_i||^2 = 1,$$

basta tomar a raiz quadrada em ambos os lados da equação e temos a afirmação.

$4 \implies 1)$ Suponha que T leva base ortonormal em um conjunto ortonormal. Sejam $u, v \in U$ quaisquer, temos que

$$u = a_1u_1 + \cdots + a_nu_n$$
$$v = b_1u_1 + \cdots + b_nu_n$$

Uma vez que, por hipótese, $\{T(u_1), \cdots, T(u_n)\} \subset V$ é ortonormal, temos que

$$\begin{aligned}
\langle T(u), T(v)\rangle &= \langle T(a_1u_1 + \cdots + a_nu_n), T(b_1u_1 + \cdots + b_nu_n)\rangle \\
&= \langle a_1T(u_1) + \cdots + a_nT(u_n), b_1T(u_1) + \cdots + b_nT(u_n)\rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_iT(u_i), \sum_{j=1}^{n} b_jT(u_j) \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{n} b_j\langle T(u_i), T(u_j)\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_ib_i.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\langle u, v\rangle &= \langle a_1u_1 + \cdots + a_nu_n, b_1u_1 + \cdots + b_nu_n\rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_iu_i, \sum_{j=1}^{n} b_ju_j \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{n} b_j\langle u_i, u_j\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_ib_i.
\end{aligned}$$

Portanto, $\langle T(u), T(v)\rangle = \langle u, v\rangle$. Logo, T é uma isometria.

■

Proposição 11.1 Se T é uma isometria então T é injetora.

Demonstração. Como T é uma isometria, segue que $||u|| = ||T(u)||$. Seja $u \in \ker(T)$ então $T(u) = 0$ o que implica que $||u|| = 0$. Assim, $u = 0$. Logo, T é injetiva pois o núcleo de T é trivial. ■

Proposição 11.2 Se $T : U \to V$ é uma isometria e $\dim U = \dim V$ então T é um isomorfismo.

Demonstração. A afirmação é uma aplicação direta da Proposição 6.4. ■

▪ **Exemplo 11.1** Seja $B = \{u, v\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear. Quais as condições devemos ter sobre a matriz de T para que T seja uma isometria?

Supondo T uma isometria e como B é ortonormal, então $\{T(u), T(v)\}$ também é ortonormal. Portanto,

$$\begin{cases} ||T(u)|| = 1 \\ ||T(v)|| = 1 \\ \langle T(u), T(v)\rangle = \langle u, v\rangle = 0 \end{cases}.$$

Como a transformação é um isomorfismo, dado que é injetiva e os espaços do domínio e contradomínio são iguais, segue que T leva base em base. Isto significa que o conjunto $\{T(u), T(v)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$. Em outras palavras, existem $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned} T(u) &= au + cv, \\ T(v) &= bu + dv. \end{aligned}$$

Portanto, a matriz da transformação T é da forma

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Daí,

$$\begin{cases} ||T(u)|| = 1 \\ ||T(v)|| = 1 \\ \langle T(u), T(v)\rangle = \langle u, v\rangle = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ||au + cv|| = 1 \\ ||bu + dv|| = 1 \\ \langle au + cv, bu + dv\rangle = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \langle au + cv, au + cv\rangle = 1 \\ \langle bu + dv, bu + dv\rangle = 1 \\ \langle au + cv, bu + dv\rangle = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \langle au, au\rangle + \langle au, cv\rangle + \langle cv, au\rangle + \langle cv, cv\rangle = 1 \\ \langle bu, bu\rangle + \langle bu, dv\rangle + \langle dv, bu\rangle + \langle dv, dv\rangle = 1 \\ \langle au, bu\rangle + \langle au, dv\rangle + \langle cv, bu\rangle + \langle cv, dv\rangle = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2\langle u, u\rangle + 2ac\langle u, v\rangle + c^2\langle v, v\rangle = 1 \\ b^2\langle u, u\rangle + 2bd\langle u, v\rangle + d^2\langle v, v\rangle = 1 \\ ab\langle u, u\rangle + ad\langle u, v\rangle + cb\langle v, u\rangle + cd\langle v, v\rangle = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \end{cases},$$

pois $\langle u,u\rangle = \langle v,v\rangle = 1$ e $\langle u,v\rangle = 0$, uma vez que B é uma base ortonormal. Note que, $a^2+c^2=1$ é a norma da primeira coluna da matriz de T, vista como um vetor. Do mesmo modo, para $b^2+d^2=1$. Assim, os vetores (a,c) e (b,d) são unitários. Além disso, $ab+cd=0$ representa o produto interno entre os vetores (a,c) e (b,d). Em outras palavras, esses vetores são ortogonais.

Note que, se multiplicarmos a transposta da matriz da transformação pela própria matriz, temos:

$$A^tA = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

Essa é uma propriedade de todas as matrizes de isometria de um operador linear. Diz-se que toda matriz com esta propriedade é uma matriz *ortogonal*. ▪

Proposição 11.3 Se o operador $T : V \to V$ é uma isometria, então os únicos autovalores λ de T, reais ou complexos, são tais que $|\lambda| = 1$.

Demonstração. Seja λ um autovalor de T. Então $T(v) = \lambda v$, para v autovetor não nulo associado a λ. Dado que T é uma isometria, temos que

$$||T(v)|| = ||\lambda v|| \implies ||v|| = |\lambda|||v|| \implies |\lambda| = 1.$$

■

▪ **Exemplo 11.2** A matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ é uma isometria?

Não é uma isometria. Em uma isometria, cada coluna da matriz tem a propriedade de ser unitária, o que não acontece com a primeira coluna da matriz acima. ▪

▪ **Exemplo 11.3** A matriz $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ é uma isometria? Façamos o produto da matriz pela sua transposta. Temos

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, é uma isometria. Vejamos se a matriz é diagonalizável. Para isso, calculamos o seu polinômio característico e encontramos os autovalores:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A-\lambda I) = \det\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}-\lambda & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}-\lambda \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\lambda\right)^2 + \frac{1}{2} \\ &= \lambda^2 - \frac{2}{\sqrt{2}}\lambda + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \lambda^2 - \frac{2}{\sqrt{2}}\lambda + 1. \end{aligned}$$

Os zeros de $p_A(\lambda)$ são

$$\lambda_1 = \frac{\frac{2}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}i}{2} = \frac{\frac{2+2i}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{1-i}{\sqrt{2}}.$$

Neste ponto, já sabemos que a matriz é diagonalizável, pois esta matriz de ordem 2 tem exatamente dois autovalores distintos. Mesmo assim, como exercício, encontramos os autovetores associados a estes autovalores.
Para λ_1, temos

$$\begin{aligned}
(A-\lambda_1 I)v=0 \;&\Rightarrow\; \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1+i}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1+i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&\Rightarrow\; \begin{bmatrix} -\frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&\Rightarrow\; \begin{cases} -\frac{i}{\sqrt{2}}x-\frac{1}{\sqrt{2}}y=0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}x-\frac{i}{\sqrt{2}}y=0 \end{cases} \\
&\Rightarrow\; x=iy.
\end{aligned}$$

Portanto, $V_{\lambda_1}=[(i,1)]$.
Para λ_2, temos

$$\begin{aligned}
(A-\lambda_2 I)v=0 \;&\Rightarrow\; \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1-i}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1-i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&\Rightarrow\; \begin{bmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&\Rightarrow\; \begin{cases} \frac{i}{\sqrt{2}}x-\frac{1}{\sqrt{2}}y=0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{i}{\sqrt{2}}y=0 \end{cases} \\
&\Rightarrow\; x=-iy \\
&\Rightarrow\; y=ix
\end{aligned}$$

Portanto, $V_{\lambda_2}=[(1,i)]$.
Como $m_a(\lambda_i)=m_g(\lambda_i), i=1,2$ então, confirmamos, que a matriz é diagonalizável. ∎

∎ **Exemplo 11.4** Seja $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ uma isometria. O que podemos esperar da matriz do operador linear T?

Sendo $B=\{u_1,\cdots,u_n\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$, segue que o conjunto $\{T(u_1),\cdots,T(u_n)\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$.

Seguindo a mesma argumentação do exemplo anterior, temos que se M é a matriz do operador linear T então $M^tM=I_n$. Ou seja, M é uma matriz ortogonal. Em outras palavras, cada coluna de M (ou linha) é unitária e o produto interno entre colunas de M (ou linhas) é igual a zero. ∎

∎ **Exemplo 11.5** A matriz

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

é uma isometria?

Basta verificar se a matriz é ortogonal.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo, a matriz acima é uma isometria. ∎

11.2 Operadores autoadjuntos e ortogonais

Toda isometria entre espaços vetoriais pode ser chamada de operador ortogonal.

Definição 11.2 Um operador T é *ortogonal* se a sua matriz $[T]$, em relação a uma base ortonormal, é ortogonal, isto é, $[T]^t[T] = I_n \Rightarrow [T]^t = [T]^{-1}$.

Definição 11.3 Seja U um espaço euclidiano e $T : U \to U$ uma transformação linear. Diz-se que T é um *operador autoadjunto* se

$$\langle T(u), v\rangle = \langle u, T(v)\rangle,$$

para todo $u, v \in U$.

∎ **Exemplo 11.6** Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $T(x,y) = (ax+by, cx+dy)$. Quais as condições sobre a,b,c,d de tal modo que T seja um operador autoadjunto?

Sejam $u = (x,y), v = (z,t) \in \mathbb{R}^2$ e suponha que T é um operador autoadjunto. Então,

$$\begin{aligned} \langle T(u), v\rangle &= \langle T(x,y), (z,t)\rangle \\ &= \langle (ax+by, cx+dy), (z,t)\rangle \\ &= (ax+by)z + (cx+dy)t \\ &= axz + byz + cxt + dyt, \end{aligned}$$

por outro lado, temos

$$\begin{aligned} \langle u, T(v)\rangle &= \langle (x,y), T(z,t)\rangle \\ &= \langle (x,y), (az+bt, cz+dt)\rangle \\ &= x(az+bt) + y(cz+dt) \\ &= axz + bxt + cyz + dyt. \end{aligned}$$

Assim, para que $\langle T(u), v\rangle = \langle u, T(v)\rangle$, temos que $b = c$. Note que a matriz de T, em relação à base canônica, é a matriz definida a partir das relações

$$\begin{aligned} T(1,0) &= (a,c) = a(1,0) + c(0,1) \\ T(0,1) &= (b,d) = b(1,0) + d(0,1), \end{aligned}$$

dado que $c = b$, temos que a matriz de T em relaçao à base canônica C é

$$[T]_C = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix},$$

que é uma matriz simétrica (lembre que uma matriz A é simétrica se ela for igual à sua transposta: $A^t = A$). Portanto, todo operador autoadjunto sobre o espaço $\mathbb{R}^2$ pode ser representado por uma matriz simétrica de ordem 2. ∎

▪ **Exemplo 11.7** 1. O operador $T(x,y) = (x+y, x-2y)$ é autoadjunto. Sua matriz, em relação à base canônica, é dada por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix},$$

que é obviamente uma matriz simétrica.

2. O operador $T(x,y) = (x+y, -x-2y)$ não é autoadjunto. Sua matriz, em relação à base canônica, é dada por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix},$$

que não é uma matriz simétrica, pois $A^t \neq A$.

∎

Definição 11.4 Um operador T é *autoadjunto* se a sua matriz $[T]$, em relação a uma base ortonormal, é simétrica, isto é, $[T]^t = [T]$;

E quanto aos autovalores e autovetores de um operador autoadjunto? Temos o sequinte resultado:

Proposição 11.4 Seja $T : V \to V$ um operador autoadjunto e λ_1, λ_2 autovalores distintos com autovetores v_1 e v_2, respectivamente. Então v_1 é ortogonal a v_2. Isto é, $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$.

Demonstração. De fato, note que

$$\begin{aligned} \lambda_1 \langle v_1, v_2 \rangle &= \langle \lambda_1 v_1, v_2 \rangle \\ &= \langle T(v_1), v_2 \rangle \\ &= \langle v_1, T(v_2) \rangle \\ &= \langle v_1, \lambda_2 v_2 \rangle \\ &= \lambda_2 \langle v_1, v_2 \rangle, \end{aligned}$$

sendo assim, $(\lambda_1 - \lambda_2)\langle v_1, v_2 \rangle = 0$. Como λ_1, λ_2 são autovalores distintos, então $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, daí segue que $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$. Logo, v_1 é ortogonal a v_2. ■

▪ **Exemplo 11.8** Seja $T(x,y,z) = (2x+y, x+y+z, y-3z)$ um operador linear de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$, com produto interno canônico.

1. Seja $v=(2,-1,5)$ e $w=(3,0,1)$, verificamos que $\langle T(v),w\rangle = \langle v,T(w)\rangle$. De fato,

$$\begin{aligned}\langle T(v),w\rangle &= \langle T(2,-1,5),(3,0,1)\rangle \\ &= \langle (3,6,-16),(3,0,1)\rangle = 9-16=-7\end{aligned}$$

   por outro lado, temos

$$\begin{aligned}\langle v,T(w)\rangle &= \langle (2,-1,5),T(3,0,1)\rangle \\ &= \langle (2,-1,5),(6,4,-3)\rangle = 12-4-15=-7.\end{aligned}$$

   Logo, $\langle T(v),w\rangle = \langle v,T(w)\rangle$.
2. Mostremos que T é autoadjunto, mas não ortogonal.
   A matriz de T, em relação à base canônica, é

$$[T]=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -3\end{bmatrix}.$$

   Note que

$$[T]^t=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -3\end{bmatrix}=[T].$$

   Isso mostra que T é autoadjunto, pois $[T]$ é simétrica. Para que T seja ortogonal, deveríamos ter que cada linha (ou coluna) de $[T]$ tem norma igual a 1, o que obviamente não ocorre, pois tomando a linha 1 $(2,1,0)$, tem-se que

$$||(2,1,0)||=\sqrt{2^2+1^2+0^2}=\sqrt{5}\neq 1.$$

   Portanto, a matriz $[T]$ não é ortogonal, pois em uma matriz ortogonal todas as suas linhas (ou colunas) devem ser unitárias. Logo, T não é ortogonal.

■

■ **Exemplo 11.9** Um exemplo de uma transformação autoadjunta e ortogonal.

Considere a transformação de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ dada por $T(x,y)=(x,-y)$. A matriz de T é dada por

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}.$$

Veja que A é simétrica o que implica que T é autoadjunta. Verificamos se a matriz A é ortogonal

$$A^tA=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Logo, A é ortogonal. Este é um exemplo de uma transformação autoadjunta e ortogonal.

Matrizes ortogonais de ordem 2, são da forma:

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \text{ ou } S_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}.$$

De fato,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Logo, R_θ e S_θ são matrizes ortogonais. Para que uma matriz ortogonal seja autoadjunta, devemos ter que $R_\theta^t = R_\theta$, i.e.,

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Comparando as matrizes acima, obtemos que $\operatorname{sen}\theta = -\operatorname{sen}\theta \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = 0$, ou seja, $\theta = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Assim, para uma rotação R_θ ser autoadjunta, temos que R_θ deve ser da forma

$$R_{k\pi} = \begin{bmatrix} \cos(k\pi) & -\operatorname{sen}(k\pi) \\ \operatorname{sen}(k\pi) & \cos(k\pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(k\pi) & 0 \\ 0 & \cos(k\pi) \end{bmatrix}.$$

Portanto, as rotações simultaneamente ortogonais e autoadjuntas são as matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Verificamos agora as reflexões S_θ. De fato,

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}.$$

Logo, toda matriz de reflexão é uma matriz autoadjunta. ∎

Portanto, temos uma infinidade de exemplos de matrizes que são simultaneamente ortogonais e autoadjuntas. Por exemplo,

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos a & 0 & 0 & -\operatorname{sen} a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen} a & 0 & 0 & -\cos a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}$$

são exemplos de matrizes simultaneamente autoadjuntas e ortogonais.

11.3 Exercícios

1. Determine se os seguintes operadores são isometrias:
   a. $T(x,y) = (y,x)$;
   b. $T(x,y) = (x+y, x-y)$;
   c. $T(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}}, \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}}\right)$;

2. Classifique os seguintes operadores quanto ao tipo (auto-adjunto, ortogonal, ambos ou nenhum dos dois):
   a. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y,z) = (x\cos\theta - y\,\text{sen}\,\theta, x\,\text{sen}\,\theta + y\cos\theta, z)$.
   b.

3. Seja o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definido por

$$T(x,y,z) = (x, 2y+3z, 3y+2z).$$

   a. Exiba uma base de autovetores de T para $\mathbb{R}^3$.
   b. T é uma isometria? Justifique.

4. Dê um exemplo de um operador linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, com matriz diferente de uma matriz diagonal, que seja autoadjunto e ortogonal. Justifique.

5. Sejam $T : V \to V$ e $S : V \to V$ operadores auto-adjuntos.
   a. Mostre que T^n também é auto-adjunto.
   b. Mostre que se T for invertível, então T^{-1} também é auto-adjunto.
   c. Mostre que $aT + bS$ é auto-adjunto, se a e b pertencerem a $\mathbb{R}$.
   d. Mostre que ST é auto-adjunto se $ST = TS$.

6. Seja V um espaço hermitiano. Considere o operador linear $T : V \to V$ e a aplicação $f : V \to \mathbb{C}$ definida como

$$f(v) = \langle T(v), v\rangle.$$

   a. Se T é autoadjunta, mostre que a imagem de f é sempre real.
   b. Mostre que $f(\lambda v) = |\lambda|^2 f(v)$, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.
   c. Prove que $f(u+v) = f(u) + f(v) + \langle T(u), v\rangle + \langle t(v), u\rangle$.
   d. Ache uma fórmula para $f(u+\lambda v)$, em que $\lambda \in \mathbb{C}$.
   e. Prove que se $f(u) = 0$ para todo u, então $T = 0$.
   f. Prove que se a imagem de f é sempre real, então T é autoadjunta.

7. Determine a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que leva o segmento de reta de extremidades $(-6,2)$ e $(-1,2)$ ao segmento de reta de extremidades $(-2,6)$ e $(1,2)$, respectivamente. Mostre que a transformação acima é uma rotação. Determine, também, o ângulo dessa rotação.

8.

9.

10.

11.

12.
13.

12. Os Teoremas Espectrais

Para certos tipos de operadores lineares $T : V \to V$, é possível garantir a existência de uma base ortonormal de autovetores de T que geram V. Neste capítulo, definimos alguns destes operadores.

12.1 Operador adjunto

Seja V um espaço euclidiano. O **operador adjunto** de $T : V \to V$ é o operador $T^* : V \to V$ tal que

$$\langle T(u), v\rangle = \langle u, T^*(v)\rangle.$$

Note que, quando $T = T^*$, o operador T é autoadjunto.

Se A é a matriz do operador linear $T : V \to V$ então a matriz do operador adjunto T^* é $\overline{A^t}$, a conjugada da transposta de A.

▪ **Exemplo 12.1** Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y) = (x+y, -x-y)$. Achemos o operador adjunto de T.

Note que

$$T(1,0) = (1,-1) = 1(1,0) - 1(0,1),$$
$$T(0,1) = (1,-1) = 1(1,0) - 1(0,1).$$

Temos que a matriz de T é dada por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Segue daí que

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Note que não precisamos calcular o conjugado de A^t, pois A é uma matriz real. Portanto, a adjunta de T é o operador $T^* : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T^*(x,y) = (x-y, x-y)$. Verificamos a

definição de adjunta, temos $T(1,0) = (1,-1)$ e daí

$$\langle T(1,0),(0,1)\rangle = \langle (1,-1),(0,1)\rangle = -1.$$

Por outro lado, temos $T^*(0,1) = (-1,-1)$ e daí

$$\langle (1,0),T^*(0,1)\rangle = \langle (1,0),(-1,-1)\rangle = -1.$$

De forma geral, seja $u = (x,y)$ e $v = (z,t)$, então temos

$$\begin{aligned}\langle T(u),v\rangle &= \langle (x+y,-x-y),(z,t)\rangle \\ &= (x+y)z-(x+y)t \\ &= (x+y)(z-t).\end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}\langle u,T^*(v)\rangle &= \langle (x,y),(z-t,z-t)\rangle \\ &= x(z-t)+y(z-t) \\ &= (x+y)(z-t).\end{aligned}$$

■

Lembre que um subespaço vetorial U de V é invariante por $T : V \to V$ se $T(U) \subset U$.

Proposição 12.1 Seja U o subespaço vetorial de V invariante pelo operador linear $T : V \to V$. Então seu complemento ortogonal $U^\perp$ é invariante pelo operador adjunto $T^* : V \to V$.

Demonstração. Como U é invariante pelo operador T então $T(U) \subset U$, em particular, dado $u \in U$ tem-se que $T(u) \in U$. Seja $v \in U^\perp$ qualquer, então $\langle u,T^*(v)\rangle = \langle T(u),v\rangle$, por definição de operador adjunto. Mas $\langle T(u),v\rangle = 0$, pois $T(u) \in U$ e $v \in U^\perp$. Portanto, $\langle u,T^*(v)\rangle = 0$ o que implica que $T^*(v) \in U^\perp$. Logo, $U^\perp$ é invariante pelo operador adjunto T^*. ■

Corolário 12.1 Seja $T : V \to V$ um operador autoadjunto. Se o subespaço U de V é invariante por T então o complemento ortogonal $U^\perp$ também é invariante por T.

A demonstração do corolário é uma aplicação imediata da proposição anterior.

Teorema 12.1 Sejam V um espaço euclidiano de dimensão dois e $T : V \to V$ um operador autoadjunto. Então existe uma base ortonormal formada por autovetores de T.

Demonstração. Seja $\{v_1,v_2\}$ uma base ortonormal de V. Sabemos que a matriz de T é uma matriz simétrica

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}.$$

Portanto, temos $Av_1 = av_1 + bv_2$ e $Av_2 = bv_1 + cv_2$. O polinômio característico de A é

$$p_A(\lambda) = (a-\lambda)(c-\lambda) - b^2 = \lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - b^2,$$

de onde

$$\Delta = (a+c)^2 - 4(ac-b^2) = a^2 + 2ac + c^2 - 4ac + 4b^2 = (a-c)^2 + 4b^2 \geq 0.$$

Temos, assim, duas possibilidade:

1. Se $\Delta = 0$ então $b = 0$ e $a = c$. Portanto, $A = aI_2$ e todo vetor não nulo de V é um autovetor. Em particular, $\{v_1, v_2\}$ é uma base ortonormal de V formada por autovetores de T.
2. Se $\Delta > 0$ então o polinômio característico $p_A(\lambda)$ tem duas raízes reais e distintas. Como vimos, isto implica que o operador T tem dois autovetores ortogonais. Basta normaliza-los para obter a base ortonormal.

■

Corolário 12.2 Sejam V um espaço euclidiano e $T : V \to V$ um operador autoadjunto. Então T possui um autovetor.

Demonstração. Exercício! ■

12.2 Teorema espectral para operadores autoadjuntos

O Teorema Espectral para operadores autoadjuntos é um dos mais famosos teoremas da álgebra linear, com várias versões para outros tipos de operadores.

Teorema 12.2 — Teorema espectral para operadores autoajuntos. Seja $T : V \to V$ um operador autoadjunto e V um espaço vetorial de dimensão n. Então existe uma base ortonormal de V formada por autovetores de T.

Demonstração. Usamos indução sobre a dimensão de V. Se $\dim V = 1$ então $V = [v]$. Daí, é imediato que $T(v) = \lambda v$, i.e., todo vetor de V é um autovetor de T, basta escolher como gerador de V um vetor v tal que $||v|| = 1$. Suponha que a afirmação seja verdadeira para $n-1$ e seja $\dim V = n$. Então, pelo Corolário 12.2, existe um autovetor unitário u_n tal que $U = [u_n]$ é invariante por T. Pelo Corolário 12.1, o mesmo vale para o complemento ortogonal $U^\perp$ de U, i.e., $T(U^\perp) \subset U^\perp$. Como $\dim U^\perp = n-1$, pela hipótese de indução temos que existe uma base ortonormal $\{u_1, \cdots, u_{n-1}\}$ de $U^\perp$ formada por autovetores de T restrito a $U^\perp$, pois como $U^\perp$ é invariante por T, segue que o operador $T|_{U^\perp}$ está bem definido. Uma vez que $V = U \oplus U^\perp$ então, por contrução, temos que $\{u_1, \cdots, u_{n-1}, u_n\}$ é uma base ortonormal formada por autovetores de T. ■

Uma consequência imediata do Teorema Espectral para Operadores Autoadjuntos é que todo operador autoadjunto é diagonalizável.

12.3 Operadores normais

Seja V um espaço euclidiano. Diz-se que um operador $T : V \to V$ é **normal** se ele comuta com o seu adjunto, isto é, $T \circ T^* = T^* \circ T$. Se A é a matriz de T tem-se que

$$A\overline{A^t} = \overline{A^t}A,$$

onde $\overline{A^t}$ é a conjugada da transposta da matriz A.

Note que

$$\langle T(u), v\rangle = \langle u, T^*(v)\rangle.$$

Seja $v = T(u)$ então

$$\langle T(u), T(u)\rangle = \langle u, T^*(T(u))\rangle.$$

Proposição 12.2 O operador $T : V \to V$ é normal se, e somente se, $||T(v)|| = ||T^*(v)||$.

Demonstração. Suponha T normal. Temos

$$\begin{aligned} ||T(v)||^2 &= \langle T(v), T(v)\rangle = \langle v, T^* \circ T(v)\rangle = \langle v, T \circ T^*(v)\rangle \\ &= \langle T^*(v), T^*(v)\rangle = ||T^*(v)||^2, \end{aligned}$$

para todo $v \in V$. Portanto, $||T(v)|| = ||T^*(v)||$. Reciprocamente, temos que

$$\langle T^* \circ T(v), v\rangle = \langle T(v), T(v)\rangle = ||T(v)||^2 = ||T^*(v)||^2 = \langle T^*(v), T^*(v)\rangle = \langle T \circ T^*(v), v\rangle,$$

para todo $v \in V$. Portanto, para quaisquer $u, w \in V$ temos

$$\langle T^* \circ T(u+w), u+w\rangle = \langle T \circ T^*(u+w), u+w\rangle.$$

Daí

$$\begin{aligned} &\langle T^* \circ T(u), u\rangle + \langle T^* \circ T(u), w\rangle + \langle T^* \circ T(w), u\rangle + \langle T^* \circ T(w), w\rangle = \\ &\langle T \circ T^*(u), u\rangle + \langle T \circ T^*(u), w\rangle + \langle T \circ T^*(w), u\rangle + \langle T \circ T^*(w), w\rangle. \end{aligned}$$

Ou seja

$$\langle T^* \circ T(u), w\rangle + \langle T^* \circ T(w), u\rangle = \langle T \circ T^*(u), w\rangle + \langle T \circ T^*(w), u\rangle.$$

Portanto,

$$\langle T^* \circ T(u), w\rangle = \langle T \circ T^*(u), w\rangle.$$

O que implica que

$$\langle (T^* \circ T - T \circ T^*)(u), w\rangle = 0,$$

para todo $u, w \in V$. Sendo assim, $(T^* \circ T - T \circ T^*)(u) = 0$, para todo $u \in V$. Logo, $T^* \circ T = T \circ T^*$ e isto mostra que T é normal. ■

Seja V um espaço vetorial complexo de dimensão finita, munido de produto interno. Sejam $T : V \to V$ um operador normal e $\alpha \in \mathbb{C}$. Então as seguintes propriedades são satisfeitas:

1. Seja A a matriz de T, então $A - \alpha I$ é normal.

   Demonstração. Temos

   $$\begin{aligned}(A-\alpha I)\overline{(A-\alpha I)^t} &= (A-\alpha I)(\overline{A^t}-\overline{\alpha} I)\\ &= A\overline{A^t} - A(\overline{\alpha} I) - \alpha I\overline{A^t} + \alpha\overline{\alpha} I\\ &= \overline{A^t}A - \alpha\overline{A^t} I - (\overline{\alpha} I)A + \alpha\overline{\alpha} I\\ &= \overline{A^t}(A-\alpha I) - \overline{\alpha} I(A-\alpha I)\\ &= (\overline{A^t}-\overline{\alpha} I)(A-\alpha I)\\ &= \overline{(A-\alpha I)^t}(A-\alpha I).\end{aligned}$$

   Portanto, $A - \alpha I$ comuta com o seu adjunto. Logo, $A - \alpha I$ é normal. ■

2. $T(v) = \alpha v$ se, e somente se, $T^*(v) = \overline{\alpha} v$.

   Demonstração. Suponha que $Av = \alpha v$ então $(A - \alpha I)v = 0$. Como $A - \alpha I$ é normal segue, pela Proposição 12.2, que $||(A-\alpha I)v|| = ||\overline{(A-\alpha I)^t}v||$, ou seja $||\overline{(A-\alpha I)^t}v|| = 0$ o que implica que $\overline{(A-\alpha I)^t}v = 0$. Assim, $\overline{A^t}v = \overline{\alpha} v$. Logo, $T^*(v) = \overline{\alpha} v$. A recíproca é análoga. ■

   Esta propriedade mostra que o operador T e o operador T^* compartilham os mesmo autovetores.

3. $\mathscr{N}(T-\alpha)$ e $[\mathscr{N}(T-\alpha)]^\perp$ são invariantes por T.

   Demonstração. Seja $v \in \mathscr{N}(T-\alpha)$ então $(T-\alpha)(v) = 0$, i.e., $T(v) = \alpha v \in \mathscr{N}(T-\alpha)$. Logo, $\mathscr{N}(T-\alpha)$ é invariante por T. Observamos também que $T^*(v) = \overline{\alpha} v$. Portanto, $\mathscr{N}(T-\alpha)$ também é invariante por T^*. Suponha $w \in [\mathscr{N}(T-\alpha)]^\perp$ e $v \in \mathscr{N}(T-\alpha)$. Temos

   $$\langle v, T(w)\rangle = \langle T^*(v), w\rangle = \langle \overline{\alpha} v, w\rangle = \alpha\langle v, w\rangle = 0.$$

   Logo, $T(w) \in [\mathscr{N}(T-\alpha)]^\perp$ e isto mostra que $[\mathscr{N}(T-\alpha)]^\perp$ é invariante por T. ■

12.4 Teorema espectral para operadores normais

Teorema 12.3 — Teorema espectral para operadores normais. Seja V um espaço vetorial complexo de dimensão finita, munido de produto interno. O operador $T : V \to V$ é normal se, e somente se, existe uma base ortogonal de V formada por autovetores de T.

Demonstração. Suponha T um operador normal. Sejam $\alpha \in \mathbb{C}$ um autovalor de T e considere $\mathscr{N}(T-\alpha)$. Se $\mathscr{N}(T-\alpha) = V$ então nada temos a provar. Suponha $\mathscr{N}(T-\alpha) \neq V$. Então $\mathscr{N}(T-\alpha)$ e $[\mathscr{N}(T-\alpha)]^\perp$ são subespaços de V invariantes por T, com $\dim \mathscr{N}(T-\alpha) < \dim V$ e $\dim[\mathscr{N}(T-\alpha)]^\perp < \dim V$. Usamos o princípio da indução finita. É óbvio para o caso em que $\dim V = 1$. Considere $\dim V = n$. Como a hipótese de indução se aplica a $\mathscr{N}(T-\alpha)$

e $[\mathscr{N}(T-\alpha)]^{\perp}$ e $V = \mathscr{N}(T-\alpha) \oplus [\mathscr{N}(T-\alpha)]^{\perp}$ então existe uma base ortogonal β_1 de $\mathscr{N}(T-\alpha)$ formada por autovetores de $T|_{\mathscr{N}(T-\alpha)}$ e uma base ortogonal β_2 de $[\mathscr{N}(T-\alpha)]^{\perp}$ formada por autovetores de $T|_{[\mathscr{N}(T-\alpha)]^{\perp}}$. Logo, $\beta = \beta_1 \cup \beta_2$ é uma base ortogonal de V formada por autovetores de T. A recíproca fica como exercício. ■

No espaço hermitiano $\mathbb{C}^n$ o produto hermitiano canônico é definido como

$$\langle (z_1,\cdots,z_n),(w_1,\cdots,w_n)\rangle = z_1\overline{w_1}+\cdots+z_n\overline{w_n}.$$

▪ **Exemplo 12.2** Considere o operador $T:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$ definido por $T(x,y)=(x+y,-x+y)$. Verificamos se o operador T é normal. Temos que a matriz de T é dada por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, o operador adjunto é dado pela matriz

$$\overline{A^t} = A^t = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Temos:

$$AA^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

e

$$A^tA = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Como $AA^t = A^tA$ segue que a matriz A é normal e, portanto, T é um operador normal. Logo, existe uma base ortogonal de $\mathbb{R}^2$ formada por autovetores de T, pelo teorema espectral para operadores normais. Vamos achar essa base.

- Autovalores:

$$\det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2+1 = \lambda^2-2\lambda+2.$$

  Os zeros do polinômio característico são $\lambda_1 = 1-i$ e $\lambda_2 = 1+i$.
- Autovetores:
  Para λ_1, temos

$$\begin{bmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow x = iy.$$

  Um autovetor associado a λ_1 é $(i,1)$.
  Para λ_2, temos

$$\begin{bmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow x = -iy.$$

  Um autovetor associado a λ_2 é $(-i,1)$.
  Portanto, $\langle (i,1),(-i,1)\rangle = i\cdot(\overline{-i})+1\cdot\overline{1} = i^2+1 = 0$. E isto confirma a aplicação do teorema espectral para operadores normais.

■

■ **Exemplo 12.3** Vamos conferir o teorema espectral para $T:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$ definido por $T(x,y)=(ix-iy,-ix+iy)$, cuja matriz em relação à base canônica é

$$A=\begin{bmatrix} i & -i \\ -i & i \end{bmatrix}.$$

Verificamos se T é normal.

$$\begin{aligned} A\overline{A^t} &= \begin{bmatrix} i & -i \\ -i & i \end{bmatrix}\overline{\begin{bmatrix} i & -i \\ -i & i \end{bmatrix}^t} \\ &= \begin{bmatrix} i & -i \\ -i & i \end{bmatrix}\overline{\begin{bmatrix} i & -i \\ -i & i \end{bmatrix}} \\ &= \begin{bmatrix} i & -i \\ -i & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{i} & \overline{-i} \\ \overline{-i} & \overline{i} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} i & -i \\ -i & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -i & i \\ i & -i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \overline{A^t}A &= \overline{\begin{bmatrix} i & -i \\ -i & i \end{bmatrix}^t}\begin{bmatrix} i & -i \\ -i & i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -i & i \\ i & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i & -i \\ -i & i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Como $A\overline{A^t}=\overline{A^t}A$ segue que a matriz A é normal e, portanto, T é um operador normal. Logo, existe uma base ortogonal de $\mathbb{C}^2$ formada por autovetores de T, pelo teorema espectral para operadores normais. Vamos achar essa base.

- Autovalores:

$$\det\begin{bmatrix} i-\lambda & -i \\ -i & i-\lambda \end{bmatrix}=(i-\lambda)^2-i^2=\lambda^2-2i\lambda=\lambda(\lambda-2i).$$

  Os zeros do polinômio característico são $\lambda_1=0$ e $\lambda_2=2i$.
- Autovetores:
  Para λ_1, temos

$$\begin{bmatrix} i-\lambda & -i \\ -i & i-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\implies x=y.$$

  Um autovetor é $(1,1)$.

Para λ_2, temos

$$\begin{bmatrix} -i & -i \\ -i & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies y = -x.$$

Um autovetor é $(1,-1)$.
Portanto, $\langle (1,1),(1,-1) \rangle = 0$. E isto confirma a aplicação do teorema espectral para operadores normais.

■

12.5 Exercícios

1. Mostre que se A é uma matriz simétrica real então A é normal. O mesmo vale para matrizes anti-simétricas?

2. Verifique se as seguintes matrizes são normais:
   a. $A = \begin{bmatrix} 2+3i & 1 \\ i & 1+2i \end{bmatrix}$;
   b. $A = \begin{bmatrix} i & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$;
   c. $A = \begin{bmatrix} 1+2i & 1-i & 2 & 3+i \\ -1-i & 1+4i & i & 2i \\ -2 & i & 1+i & -3 \\ -3+i & 2i & 3 & 1+3i \end{bmatrix}$.

3. Toda matriz simétrica complexa é normal? Justifique.

4. Mostre que toda matriz hermitiana é normal. O mesmo vale para matrizes anti-hermitianas?

5. Seja o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definido por

$$T(x,y,z) = \left(\frac{x-\sqrt{2}y+z}{2}, \frac{-3\sqrt{2}x-4y-\sqrt{2}z}{6}, \frac{3x-\sqrt{2}y-5z}{6}\right).$$

   a. T é um operador auto-adjunto? Justifique.
   b. T é um operador ortogonal? Justifique.
   c. T é uma isometria? Justifique.
   d. T e um operador normal? Justifique.
   e. Exiba uma base de autovetores de T para $\mathbb{R}^3$.

6. A matriz $A = \begin{bmatrix} 1+2i & 1-i & 2 & 3+i \\ -1-i & 1+4i & i & 2i \\ -2 & i & 1+i & -3 \\ -3+i & 2i & 3 & 1+3i \end{bmatrix}$ é normal? Justifique.

13. Formas lineares, bilineares e quadráticas

13.1 Formas lineares e bilineares

Conhecemos a forma linear e a estudamos muito, apenas com o nome de funcional linear.

Definição 13.1 — Forma Linear. Seja V um espaço vetorial real. Uma forma linear é uma transformação linear $T : V \to \mathbb{R}$.

Definição 13.2 — Forma Bilinear. Seja V um espaço vetorial real. Uma forma bilinear é uma aplicação $B : V \times V \to \mathbb{R}$ definida por $(v,w) \mapsto B(v,w)$ tal que:

1. Para todo w fixado, $B(v,w)$ é uma forma linear em v, i.e.,

$$\begin{aligned} B(v_1+v_2,w) &= B(v_1,w)+B(v_2,w) \\ B(\alpha v,w) &= \alpha B(v,w). \end{aligned}$$

2. Para todo v fixado, $B(v,w)$ é uma forma linear em w, i.e.,

$$\begin{aligned} B(v,w_1+w_2) &= B(v,w_1)+B(v,w_2) \\ B(v,\alpha w) &= \alpha B(v,w). \end{aligned}$$

Uma forma bilinear $B : V \times V \to \mathbb{R}$ é chamada *simétrica* se

$$B(v,w) = B(w,v),$$

para todos $v, w \in V$.

▪ **Exemplo 13.1** 1. Formas lineares:

a. Se $V = \mathbb{R}^2$ então a soma de dois números reais

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x+y \end{aligned}$$

é uma forma linear.

b. Se $V = \mathbb{R}^2$ então o produto de dois números reais não é uma forma linear.

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & xy. \end{array}$$

Sejam $v = (x_1, y_1)$ e $w = (x_2, y_2)$. Temos,

$$f(v+w) = f(x_1+x_2, y_1+y_2) = (x_1+x_2)(y_1+y_2) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$$

por outro lado,

$$f(v) + f(w) = x_1y_1 + x_2y_2.$$

Portanto, $f(v+w) \neq f(v) + f(w)$ e isto mostra que f não é linear.

2. Formas bilineares:

a. Se $V = \mathbb{R}$ então a soma de dois números reais

$$\begin{array}{rccc} B: & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & x+y \end{array}$$

não é uma forma bilinear, pois para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$, temos $B(\alpha x, y) = \alpha x + y \neq \alpha(x+y) = \alpha B(x,y)$.

b. Se $V = \mathbb{R}$ então o produto de dois números reais

$$\begin{array}{rccc} B: & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & xy \end{array}$$

é uma forma bilinear. De fato, fixando y e vericando que B é linear na primeira coordenada:

$$\begin{array}{rcl} B(x_1+x_2, y) & = & (x_1+x_2)y = x_1y + x_2y = B(x_1,y) + B(x_2,y) \\ B(\alpha x, y) & = & (\alpha x)y = \alpha(xy) = \alpha B(x,y). \end{array}$$

O outro caso é análogo e daí temos a bilinearidade de B.
Note que a forma bilinear é simétrica, pois

$$B(x,y) = xy = yx = B(y,x), \forall (x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}.$$

c. Seja V um espaço vetorial munido de produto interno. O produto interno associado a V é uma forma bilinear simétrica. Defina, $B: V \times V \to \mathbb{R}$ por $B(u,v) = \langle u, v\rangle$. Temos

$$\begin{array}{rcl} B(u_1+u_2, v) & = & \langle u_1+u_2, v\rangle \\ & = & \langle u_1, v\rangle + \langle u_2, v\rangle \\ & = & B(u_1,v) + B(u_2,v). \end{array}$$

Temos também que

$$B(\alpha u, v) = \langle \alpha u, v\rangle = \alpha\langle u, v\rangle = \alpha B(u, v).$$

De maneira análoga, prova-se que $B(u, v_1 + v_2) = B(u, v_1) + B(u, v_2)$ e $B(u, \alpha v) = \alpha B(u, v)$. Além disso,

$$B(u, v) = \langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle = B(v, u),$$

pois a comutatividade é uma propriedade do produto interno. Logo, qualquer produto interno é uma forma bilinear simétrica.

d. Considere a matriz

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

A forma bilinear $B : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ associada a M é escrita da forma

$$\begin{aligned} B((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) &= \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \\ &= x_1x_2 - x_2y_1 + 2y_1y_2 + y_2z_1 + z_1z_2. \end{aligned}$$

Sendo $u = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$, temos, para facilitar a escrita, que

$$B(u, v) = u^t M v.$$

Agora fica mais fácil verificar as propriedades da bilinearidade. Sejam $u, v, w \in \mathbb{R}^3$. Temos

$$\begin{aligned} B(u + w, v) &= (u + w)^t M v = (u^t + w^t) M v \\ &= u^t M v + w^t M v = B(u, v) + B(w, v) \end{aligned}$$

e que

$$B(\alpha u, v) = (\alpha u)^t M v = \alpha u^t M v = \alpha B(u, v).$$

Analogamente, provamos que B é linear com relação à segunda coordenada (faça como exercício). Logo, B é bilinear. Esta forma bilinear é simétrica? Vejamos.

$$\begin{aligned} B(v, u) &= v^t M u = \begin{bmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \\ &= x_1x_2 - x_1y_2 + 2y_1y_2 + y_1z_2 + z_1z_2 \\ &\neq x_1x_2 - x_2y_1 + 2y_1y_2 + y_2z_1 + z_1z_2 \\ &= B(u, v). \end{aligned}$$

Logo, a forma bilinear não é simétrica.

■

Neste ultimo exemplo, vemos que se temos uma matriz quadrada M_n é possível definir uma forma bilinear $B : V \times V \to \mathbb{R}$ tal que $B(u, v) = u^t M_n v$, onde $\dim V = n$.

13.1.1 Matriz da forma bilinear

Seja V um espaço vetorial real e $\beta = \{v_1, \cdots, v_n\}$ uma base de V. Sejam $v, w \in V$ então existem $x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$v = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n \text{ e } w = y_1v_1 + \cdots + y_nv_n.$$

Considere $B : V \times V \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear. Usando a bilinearidade de B temos que

$$\begin{aligned}
B(v,w) &= B(x_1v_1 + \cdots + x_nv_n, y_1v_1 + \cdots + y_nv_n) \\
&= B(x_1v_1, y_1v_1 + \cdots + y_nv_n) + \cdots + B(x_nv_n, y_1v_1 + \cdots + y_nv_n) \\
&= x_1B(v_1, y_1v_1 + \cdots + y_nv_n) + \cdots + x_nB(v_n, y_1v_1 + \cdots + y_nv_n) \\
&= x_1(B(v_1, y_1v_1) + \cdots + B(v_1, y_nv_n)) + \cdots \\
&= x_1y_1B(v_1,v_1) + \cdots + x_1y_nB(v_1,v_n) + \cdots + x_ny_1B(v_n,v_1) + \cdots + x_ny_nB(v_n,v_n) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} x_iy_jB(v_i,v_j) \\
&= \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B(v_1,v_1) & \cdots & B(v_1,v_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B(v_n,v_1) & \cdots & B(v_n,v_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Portanto, a matriz da forma bilinear B é

$$[B]_\beta = \begin{bmatrix} B(v_1,v_1) & \cdots & B(v_1,v_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B(v_n,v_1) & \cdots & B(n_n,v_n) \end{bmatrix}.$$

Se β for a base canônica então indicamos a matriz de B simplesmente por B.

Se B for uma forma bilinear simétrica então $B(v_i,v_j) = B(v_j,v_i)$, para cada $i, j = 1, \cdots, n$. Isso implica que a matriz de B é simétrica.

▪ **Exemplo 13.2** Seja $B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a forma bilinear dada por $B((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = -x_1y_1 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2$. Encontre a matriz de B em relação à base canônica. ▪

Em relação à base canônica de $\mathbb{R}^2$, temos que

$$B = \begin{bmatrix} B(e_1,e_1) & B(e_1,e_2) \\ B(e_2,e_1) & B(e_2,e_2) \end{bmatrix}.$$

E daí

$$\begin{aligned}
B((1,0),(1,0)) &= -1, \\
B((1,0),(0,1)) &= 0, \\
B((0,1),(1,0)) &= 2 \text{ e} \\
B((0,1),(0,1)) &= 5.
\end{aligned}$$

Logo,

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

A forma B pode ser representada de outra forma:

$$B((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

13.2 Formas quadráticas

Definição 13.3 — Forma Quadrática. Seja V um espaço vetorial e $B : V \times V \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear simétrica. A função $Q : V \to \mathbb{R}$ definida por $Q(v) = B(v,v)$ é chamada forma quadrática associada a B.

Considere V um espaço vetorial real e $\beta = \{v_1, \cdots, v_n\}$ uma base de V. Seja $v = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n$. A matriz da forma quadrática $Q : V \to \mathbb{R}$ associada à forma bilinear $B : V \times V \to \mathbb{R}$ é uma matriz simétrica, pois B é uma forma bilinear simétrica.

▪ **Exemplo 13.3** Considere a forma quadrática $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $Q(x,y) = x^2 - 10xy + y^2$. Encontrar a matriz de Q.

Não conhecemos a forma bilinear B, mas sabemos que

$$Q(x,y) = B((x,y),(x,y)) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

Comparando as expressões de Q, temos que $a = 1, b = -5$ e $c = 1$. Portanto,

$$[Q] = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}.$$

De modo geral, sendo $Q(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$, temos que a matriz de Q é

$$[Q] = \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix}.$$

Se $Q(x,y) = 3x^2 + 4xy - 2y^2$ então a matriz de Q é

$$[Q] = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

▪

▪ **Exemplo 13.4** Encontremos a matriz de $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida como $Q(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 6yz + 2z^2$.

Sabemos que

$$\begin{aligned} Q(x,y,z) &= B((x,y,z),(x,y,z)) = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ax+by+cz \\ bx+dy+ez \\ cx+ey+fz \end{bmatrix} \\ &= x(ax+by+cz)+y(bx+dy+ez)+z(cx+ey+fz) \\ &= ax^2+bxy+cxz+bxy+dy^2+eyz+cxz+eyz+fz^2 \\ &= ax^2+2bxy+2cxz+dy^2+2eyz+fz^2 \end{aligned}$$

é a expressão geral de uma forma quadrática. Agora, basta comparar as duas expressões. Temos $a = 1, 2b = 0, 2c = 0, d = 2, 2e = 6, f = 2$. Logo, a matriz de Q é da forma:

$$[Q] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

A matriz da forma quadrática geral $Q(x,y,z) = ax^2+2bxy+2cxz+dy^2+2eyz+fz^2$ é

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}.$$

■

13.2.1 Diagonalização da forma quadrática

Como a matriz da forma quadrática é sempre uma matriz simétrica temos, pelo Teorema Espectral, que a forma quadrática é diagonalizável. Desta forma, vale o seguinte resultado:

Seja $Q(v) = B(v,v)$ uma forma quadrática em V. Existe uma base ortonormal β de V tal que se

$$[v]_\beta = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

são as coordenadas de v em relação à base β então $Q(v) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$, onde λ_i são os autovalores associados a Q.

No exemplo 8, temos que $\lambda_1 = 6$ e $\lambda_2 = -4$ (confira!) são os autovalores de Q. De fato,

$$\det(Q-\lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -5 \\ -5 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda^2)-25 = \lambda^2-2\lambda-24.$$

Temos daí que um autovetor associado a λ_1 é

$$\begin{aligned}(Q-6I)v=0 &\iff \begin{bmatrix} -5 & -5 \\ -5 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\iff -5x-5y=0 \\ &\iff y=-x.\end{aligned}$$

Portanto, $V_6=[(1,-1)]$. Do mesmo modo, $V_{-4}=[(1,1)]$.

Aplicando o resultado acima, temos que $\beta=\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$ é a base ortonormal de tal modo que $Q(x,y)=6x^2-4y^2$.

No exemplo 11, os autovalores são $\lambda_1=-1,\lambda_2=1$ e $\lambda_3=5$. Portanto, existe uma base ortonormal, formada por autovetores de Q, tal que $Q(x,y,z)=-x^2+y^2+5z^2$.

13.3 Exercícios

1. Seja $B:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ a aplicação definida por

$$B((x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2))=-x_1x_2+2x_2y_1+2x_1y_2+x_2z_1-y_2z_1+x_1z_2-y_1z_2+z_1z_2.$$

   a. Mostre que B é uma forma bilinear simétrica.
   b. Ache a matriz de B em relação à base canônica.
   c. Ache a forma quadrática $Q:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ associada a B.
   d. Determine uma base ortonormal β de Q tal que sua matriz seja diagonal.
   e. É possível encontrar $a,b,c\in\mathbb{R}$ tais que seja possível escrever Q na forma $Q(x,y,z)=ax^2+by^2+cz^2$? Justifique.

Bibliography

Índice Remissivo

Autoespaço, 115
    generalizado, 151
Autovalor, 113
    da transformação inversa, 123
    multiplicidade algébrica, 121
    multiplicidade geométrica, 121
Autovetor, 113
    generalizado, 151
      cadeia, 151
    genuíno, 151
    ordinário, 151

Base canônica, 45
Base de um espaço vetorial, 45
    bases canônicas, 45–47, 49, 72, 80, 82, 108, 126
    ortonormal, 170

Combinação linear, 35
    conjunto gerado, 35
    definição, 35
    subespaço gerado, 36
Conjunto
    ortogonal, 167
    ortonormal, 166, 167
Coordenadas de um vetor, 57
Corpo, 12
    ação em um conjunto, 13
    dos complexos, 14
    propriedades, 12

Dependência e independência linear, 40
    vetores LD, 40
    vetores LI, 40
Desiqualdade
    de Cauchy-Schwarz, 163
    do valor absoluto, 166
    triangular, 163
Dimensão de um espaço vetorial, 49, 52

Espaço dual, 81
    dimensão do, 81
Espaços euclidianos, 159, 161
Espaços hermitianos, 162
Espaços vetoriais, 13
    n-uplas ordenadas, 16
    base, 45
    base ordenada, 57
    bases canônicas, 45–47, 49, 72, 80, 82, 108, 126
    complemento ortogonal, 168
    definição, 13
    dimensão, 49
    dimensão da soma, 52
    dual, 81
    euclidiano, 161
    finitamente gerado, 49
    funções pares, 21
    funções reais, 20
    hermitiano, 162
    matriz mudança de base, 61, 62
    matrizes de ordem qualquer, 17
    matrizes quadradas de ordem n, 16
    norma, 163
    o espaço $\mathscr{L}(U,V)$, 81
    polinômios com coeficientes reais, 20
    polinômios de grau menor ou igual a n, 18
    produto escalar, 161
    produto interno, 159
    sequências de números reais, 16
    ternas ordenadas $\mathbb{R}^3$, 14

Forma bilinear, 195
    matriz da, 198
    simétrica, 198, 199
Forma canônica de Jordan, 144
    blocos de Jordan, 144, 145
Forma linear, 86, 195
Forma quadrática, 199

diagonalização, 200
matriz da, 199
Funcional linear, 86

Geradores
canônicos, 37

Identidade do paralelogramo, 164
Imagem de uma transformação linear, 85
Interseção de subespaços vetoriais, 30
Isometria, 177
Isomorfismo, 77, 92
entre os espaços $\mathscr{L}(U,V)$ e $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, 99, 102

Matriz
da forma bilinear, 198
da forma quadrática, 199
da transformação identidade, 104
de uma transformação linear, 97
inversa de uma transformação linear, 103
mudança de base, 61, 62, 105
semelhança, 133
simétrica, 183
Matriz de uma transformação linear, 97
definição, 97
Matriz mudança de base, 61
definição, 62
inversa de, 64
produto de, 63
Multiplicidade
algébrica, 121
geométrica, 121

Norma, 163
desigualdade de Cauchy-Schwarz, 163
desigualdade triangular, 163
propriedades, 163
vetor unitário, 164
Núcleo de uma transformação linear, 83

Operador linear, 75, 89
adjunto, 187
autoadjunto, 182, 183
diagonalização de, 133
normal, 190, 191
ortogonal, 181
Ortonormalização de Gram-Schmidt, 170

Polinômio característico, 115
polinômio anulador de uma matriz, 118
Polinômio minimal, 143
Polinômio mônico, 118
Produto interno, 159
hermitiano, 162, 192
propriedades, 159
sesquilinear, 162

Segmentos
comprimento, 9
de reta, 9
direção, 10
equipolentes, 10
orientado, 9
sentido, 10
Soma de subespaços vetoriais, 30
direta, 31
Subespaços vetoriais, 25
definição, 25
dimensão da soma, 52, 53
interseção de, 30
invariantes, 127
soma de, 30
soma direta, 31

Teorema
da diagonalização de operadores, 134
da existência de uma transformação linear, 78
de Cayley-Hamilton, 119
do completamento, 50
do núcleo e da imagem, 87
dos espaços isomorfos, 92
espectral para operadores autoadjuntos, 189
espectral para operadores normais, 191
Teorema espectral, 187
para operador autoadjunto, 189
para operador normal, 191
Transformação linear
adjunto, 187

autoadjunto, 182, 183
composição, 77
definição, 75
diagonalização, 133
forma linear, 81
funcional linear, 81
idempotente, 106
imagem, 85
injetiva, 76
inversa de, 103
involutivas, 107
isometria, 177
isomorfismo, 77, 92
matriz de uma, 97
nilpotente, 106
nulidade, 107
núcleo, 83
ortogonal, 181
posto, 107
sobrejetiva, 77
teorema da existência, 78

Vetor, 9
angulo entre dois vetores, 165
coordenadas de um, 57
definição, 11
distância, 165
linearmente dependentes, 40
linearmente independentes, 40
norma de um, 163
ortogonais, 167
versor de um, 164

Sobre os autores

Leandro Nery de Oliveira

Foi professor na Universidade Federal do Acre (2004 a 2020) e atualmente é professor na Universidade Federal de São Carlos. Fez licenciatura em Matemática na UFAC, mestrado em Matemática na UFES e doutorado em Matemática no Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação na Universidade de São Paulo (ICMC-USP).

Fernando Pereira Paulucio Reis

Graduação e Mestrado em Matemática pela Universidade Federal do Espírito Santo e Doutorado em Matemática pela Universidade Federal do Rio de Janeiro. Professor adjunto da Universidade Federal do Espírito Santo. Desenvolve pesquisa na área de Métodos Geométricos de Equações Diferenciais e Folheações. Também tem interesse em Singularidades e Teoria Assintótica.

Maico Felipe Silva Ribeiro

Doutorado em Matemática pela Universidade de São Paulo, ICMC-USP (2018). Atualmente é professor adjunto da Universidade Federal do Espírito Santo. Desenvolve atividade de pesquisa na área de Geometria/Topologia, com ênfase em Teoria de Singularidades (Teoria das Catástrofes), atuando principalmente nos seguintes temas: Geometria e topologia de singularidades reais e complexas, Teoria de estratificação, Fibrações Singulares de Milnor, Topologia Algébrica e Topologia Diferencial. Também tem interesse em Teoria de Categorias.